Formulas importantes de mecánica de medios continuos

Ignacio Romero Olleros
Dpto. Ingeniería Mecánica
E.T.S.I. Industriales
Universidad Politécnica de Madrid
ignacio.romero@upm.es

13 de septiembre de 2023

1. Conceptos matemáticos

Matriz de cambio de base	$A_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_j$
Cambio de base de vector	$\{\boldsymbol{v}\}_{\mathcal{B}} = [A]\{\boldsymbol{v}\}_{\mathcal{B}'}$
Cambio de base de tensor	$\{\boldsymbol{T}\}_{\mathcal{B}} = [A]\{\boldsymbol{T}\}_{\mathcal{B}'}[A]^T$
Tensor hemisimétrico asociado	$\hat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}$
Producto diádico	$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}$
Invariantes principales	$I_1(\boldsymbol{F}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{F})$
	$I_2(\boldsymbol{F}) = \frac{1}{2}(I_1^2 - \operatorname{tr}(\boldsymbol{F}^2))$
	$I_3(\boldsymbol{F}) = \det \boldsymbol{F}$
Derivadas de los invariantes	$\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{F}} = \boldsymbol{I}$
	$\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{F}} = I_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}^T$
	$\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{F}} = \det(\boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{-T}$
Producto vectorial	$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \epsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, \boldsymbol{e}_k$
Gradiente (cartesianas)	$\nabla_{\boldsymbol{x}} f = f_{,i}\, \boldsymbol{e}_i$
Gradiente (cartesianas)	$\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v} = v_{i,j}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$
Divergencia (cartesianas)	$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} = v_{i,i}$
Divergencia (cartesianas)	$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{T} = T_{ij,j}\, \boldsymbol{e}_i$
Rotacional (cartesianas)	$\nabla_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{v} = \epsilon_{ijk}\, v_{j,i}\, \boldsymbol{e}_k$
Igualdad $\delta - \epsilon$	$\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{ipq} = \delta_{jp}\, \delta_{kq} - \delta_{jq}\, \delta_{kp}$

2. Cinemática

Gradiente de deformación	$\boldsymbol{F} = \nabla_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\varphi}_t$
Descomposición polar	$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}$
Deformación de Cauchy-Green (derecho)	$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F}$
Deformación de Finger (izquierdo)	$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$
Deformación de Green-Lagrange	$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I})$
Transformación de longitud	$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{X}$
Transformación de área	$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a = \mathrm{adj}\boldsymbol{F}\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}A$
Transformación de volumen	$\mathrm{d}v = J\,\mathrm{d}V$
Derivada material	$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}}\psi\,\boldsymbol{v}$
Velocidad material	$\boldsymbol{V} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\varphi}_t$
Aceleración material	$\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{V}$
Velocidad espacial	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}$
Aceleración espacial	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1} = \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}$
Tasa de deformación	$\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}(\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v} + \nabla_{\boldsymbol{x}}{}^T\boldsymbol{v})$

3. Equilibrio

Teorema de Cauchy	$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}$
	$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{N}$
Primer tensor de tensión de Piola-Kirchhoff	$\boldsymbol{P} = J\,\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}$
Segundo tensor de tensión de Piola-Kirhhoff	$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P}$
Componente normal de la tensión	$\sigma_n = \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}$
Componente tangencial de la tensión	$\lvert\boldsymbol{\tau}\rvert = \sqrt{\lvert\boldsymbol{t}\rvert^2 - \sigma_n^2}$

4. Leyes de balance

Expresiones lagrangianas:

Conservación de masa	$\rho_{ref} = J\,(\rho \circ \varphi_t)$
Cons. de la cantidad de movimiento	$\nabla_{\boldsymbol{X}} \cdot \boldsymbol{P} + \rho_{ref}\boldsymbol{B} = \rho_{ref}\boldsymbol{A}$
Conservación del momento cinético	$\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}^T$
Deformación isocórica	$J = 1$
Conservación de la energía	$\rho_{ref}\,\dot{U} = \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} + \rho_{ref}\,R - \nabla_{\boldsymbol{X}} \cdot \boldsymbol{Q}$
Generación local de entropía	$\Gamma_{loc} = \rho_{ref}\dot{S} - \rho_{ref}\frac{R}{\Theta} + \frac{\nabla_{\boldsymbol{X}} \cdot \boldsymbol{Q}}{\Theta}$
Gen. de entropía por conducción	$\Gamma_{con} = -\frac{\boldsymbol{Q}}{\Theta^2} \cdot \nabla_{\boldsymbol{X}}\Theta$
Desigualdad de Clausius-Duhem	$\Gamma = \Gamma_{loc} + \Gamma_{con} \geq 0$
Desigualdad de Clausius-Planck	$\Gamma_{loc} \geq 0 \qquad \Gamma_{con} \geq 0$

Expresiones eulerianas:

Conservación de masa	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot (\rho\,\boldsymbol{v}) = 0$
Cons. de la cantidad de movimiento	$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\,\boldsymbol{b} = \rho\,\boldsymbol{a}$
Conservación del momento cinético	$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$
Deformación isocórica	$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} = 0$
Conservación de la energía	$\rho\,\frac{Du}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} + \rho\,r - \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{q}$
Generación local de entropía	$\gamma_{loc} = \rho\frac{Ds}{Dt} - \rho\frac{r}{\theta} + \frac{\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{q}}{\theta}$
Gen. de entropía por conducción	$\gamma_{con} = -\frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{q} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}}\theta$
Desigualdad de Clausius-Duhem	$\gamma = \gamma_{loc} + \gamma_{con} \geq 0$
Desigualdad de Clausius-Planck	$\gamma_{loc} \geq 0 \qquad \gamma_{con} \geq 0$

5. Modelos constitutivos

Modelo constitutivo	$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}[\boldsymbol{\varphi}_t]$
Movimiento superpuesto	$\boldsymbol{\varphi}_t^+ = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{\varphi}_t + \boldsymbol{c}(t)$
Condición de objetividad	$\mathcal{F}[\boldsymbol{\varphi}_t^+] = \boldsymbol{Q}(t)\,\mathcal{F}[\boldsymbol{\varphi}_t]\,\boldsymbol{Q}^T(t)$

6. Mecánica de fluidos

Línea de corriente	$\boldsymbol{c}'(\alpha) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{c}(\alpha), t^*)$
Trayectoria	$\boldsymbol{\tau}'(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\tau}(t), t)$
Vorticidad	$\xi = 2\,\boldsymbol{\omega} = \nabla_{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{v}$
Circulación	$\mathcal{C}_\Gamma = \oint_\Gamma \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$
Fluido perfecto	$\boldsymbol{\sigma} = -p\,\boldsymbol{I}$
Ec. Euler	$-\nabla_{\boldsymbol{x}} p + \rho\boldsymbol{b} = \rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}$
T. Bernoulli	$\Phi = \frac{\lvert\boldsymbol{v}\rvert^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g x_3 = \text{const.}$
Fluido newtoniano isótropo	$\boldsymbol{\sigma} = -p\,\boldsymbol{I} + 2\mu\,\boldsymbol{d}$
Ec. Navier-Stokes	$-\nabla p + \mu\Delta\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{b} = \rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}$
	$\nabla_{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{v} = 0$

7. Mecánica de sólidos

Material hiperelástico	$\boldsymbol{P} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}}$
Sólido objetivo	$\boldsymbol{S} = 2\frac{\partial \bar{W}}{\partial \boldsymbol{C}}$
Sólido objetivo incompresible	$\boldsymbol{S} = 2\frac{\partial \bar{W}}{\partial \boldsymbol{C}} - p\boldsymbol{C}^{-1}$
Sólido isótropo	$\bar{W} = \bar{W}(I_1, I_2, I_3)$
Modelo neohookeano	$\bar{W}(\boldsymbol{C}) = U(J) + \frac{\mu}{2}(I_1(\tilde{\boldsymbol{C}}) - 3)$
	$J = \sqrt{\det \boldsymbol{C}},\ \tilde{\boldsymbol{C}} = J^{-2/3}\boldsymbol{C}$
Sólido incompresible	$\boldsymbol{P} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}} - p\boldsymbol{F}^{-T}$
Energía potencial	$V = \int_{\mathcal{B}_{ref}} W(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}V - V_{ext}(\boldsymbol{\varphi})$
	$V_{ext} = \int_{\mathcal{B}_{ref}} \rho_{ref}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}V$
	$+\int_{\partial_N\mathcal{B}_{ref}} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}A$