

# Mecánica analítica

I. Romero

29 de septiembre de 2020

En ingeniería, la mecánica de partículas y sólidos rígidos se suele presentar siguiendo el formalismo de Newton-Euler, identificando fuerzas y pares, imponiendo el balance de la cantidad de movimiento y momento cinético, y sacando como resultado la cinemática, la energía, etc. Este enfoque es el más intuitivo, e históricamente, el primero en desarrollarse, primero por Galileo, después Newton, Euler y otros.

En 1788 J.L. Lagrange presentó una teoría para el estudio de la mecánica completamente distinta a la de Newton-Euler y que describimos en estos apuntes. La teoría de Lagrange se conoce con el nombre de *Mecánica Analítica* y, como se verá, presenta un enfoque mucho más sistemático y abstracto que el clásico. De hecho, es conocido que Lagrange se jactaba, en su texto, de presentar toda la mecánica sin necesidad de recurrir a ninguna figura.

## 1. Coordenadas generalizadas

En la mecánica de Newton-Euler, las ecuaciones de balance se postulan en sistemas inerciales. Para especificar la posición de todas las partículas y cuerpos de un sistema se emplean vectores de posición y giro de cada uno de ellos, a menudo utilizando descripciones relativas y restricciones para facilitar esta formulación.

En la mecánica analítica se utiliza una descripción cinemática mucho más sencilla, en base a las llamadas *coordenadas generalizadas* que son parámetros  $q_1, q_2, \dots, q_N$  que describen de manera completa y unívoca la configuración de un sistema. Estas coordenadas pueden ser distancias, proyecciones, ángulos, etc., y se pueden escoger de muchas maneras. El número de coordenadas generalizadas se corresponde, lógicamente, con el número de *grados de libertad* del sistema.

Consideremos primero, por simplicidad, el caso de un sistema de  $P$  partículas sin restricciones anholónomas. La configuración de éste queda definida por los vectores de posición  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_P$  y, posiblemente,  $K$  restricciones holónomas. A su vez, es posible determinar de manera única la configuración

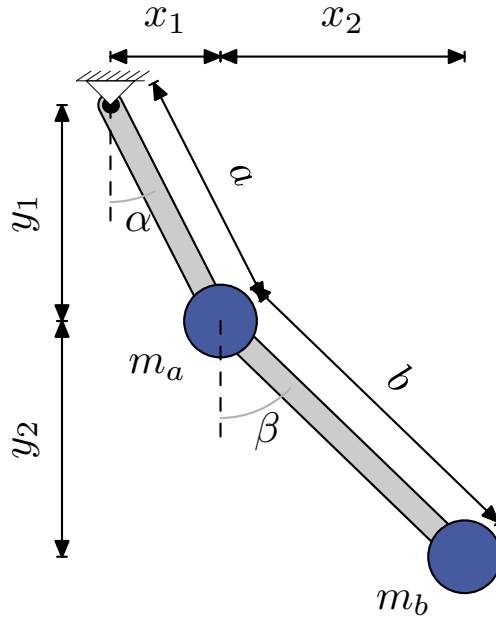


Figura 1: Sistema mecánico con dos grados de libertad, y tres conjuntos de coordenadas generalizadas

del sistema mediante  $N$  coordenadas generalizadas, así que es posible hacer un cambio de variable

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\{q_j\}_{j=1}^N, t), \quad i = 1, \dots, P. \quad (1)$$

La velocidad de todas las partículas se puede escribir como

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (2)$$

y hemos utilizado la notación  $\dot{a}$  para indicar la derivada con respecto al tiempo de una función cualquiera  $a = a(t)$ . Las tasas  $\dot{q}_j$  se llaman las **velocidades generalizadas**.

▷ **Ejemplo 1.1.** Una partícula con masa  $m$  se mueve dentro de una ranura en un disco que está girando alrededor de un punto fijo (ver la figura 2). En este ejemplo, la posición de la partícula queda unívocamente determinada con dos coordenadas generalizadas  $(\alpha, l)$ . ◁

▷ **Ejemplo 1.2.** Una manivela gira y tira de un hilo que pasa por una polea y está atado a una masa  $M$ . La configuración de este sistema está unívocamente definida con el ángulo  $\alpha$  de giro de la manivela. Ver la figura 3 ◁

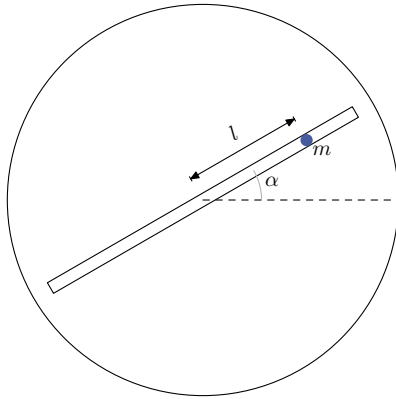


Figura 2: Geometría del ejemplo 1.1.

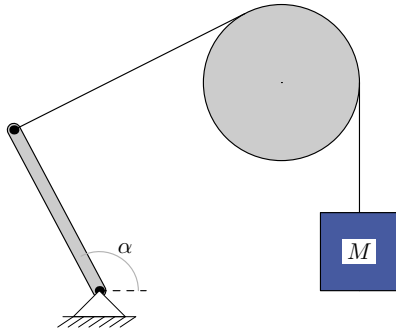


Figura 3: Geometría del ejemplo 1.2.

## 2. Las ecuaciones de Lagrange

Comenzamos obteniendo las ecuaciones de Lagrange para un sistema de  $P$  partículas. La segunda ley de Newton establece que, si  $m_i$  y  $\mathbf{f}_i$  son, respectivamente, la masa y fuerza sobre la partícula  $i$ -ésima, se satisface que

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i , \quad (3)$$

para  $i = 1, 2, \dots, P$ . En cualquier instante, podemos escoger  $P$  vectores, completamente arbitrarios, que llamamos  $\delta \mathbf{r}_i$  y que se llaman **desplazamientos virtuales**. Las ecuaciones del movimiento se satisfacen si y sólo si

$$0 = \sum_{i=1}^P (\mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i , \quad (4)$$

para cualquier colección  $\{\delta \mathbf{r}_i\}_{i=1}^N$ . Este es el llamado **principio de D'Alembert** y es inmediato verificar que es una condición necesaria y suficiente para el equilibrio de todas las partículas.

Como el vector  $\mathbf{r}_i$  es una función de las coordenadas generalizadas, un vector cualquiera  $\delta\mathbf{r}_i$  (constante en el tiempo) se puede escribir en función de valores arbitrarias de las coordenadas generalizadas, es decir,

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (5)$$

Si se sustituye esta identidad en la ecuación (4) se obtiene un término de la forma

$$\sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j, \quad (6)$$

siendo  $Q_j$  una cantidad con dimensión de fuerza que llamamos **fuerza generalizada** y cuya definición explícita es

$$Q_j = \sum_{i=1}^P \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (7)$$

Para continuar transformando las ecuaciones del principio de D'Alembert observamos la siguiente relación:

$$\frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (8)$$

El segundo término que aparece al sustituir (5) en (4) es

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^P \left[ \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^P \left[ \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j}) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^P \left[ \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j}) - m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^P \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_i |\mathbf{v}_i|^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} m_i |\mathbf{v}_i|^2 \right) \right] \delta q_j. \end{aligned} \quad (9)$$

Definiendo la **energía cinética** del sistema de partículas como

$$T = \sum_{i=1}^P \frac{1}{2} m_i |\mathbf{v}_i|^2, \quad (10)$$

obtenemos, sustituyendo (6) y (9) en el principio de D'Alembert:

$$0 = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j. \quad (11)$$

Como las variaciones  $\delta q_j$  son arbitrarias, el término en el corchete ha de ser nulo para cada  $j$ , es decir,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j . \quad (12)$$

Estas son las **ecuaciones de Lagrange** para la dinámica de partículas.

Existe una situación muy común en la que las fuerzas  $\mathbf{f}_i$  derivan de un potencial  $V = V(\{\mathbf{r}_j\}_{j=1}^P)$  (el gravitatorio, por ejemplo), es decir,

$$\mathbf{f}_i = - \frac{\partial V(\{\mathbf{r}_j\}_{j=1}^P)}{\partial \mathbf{r}_i} . \quad (13)$$

En este caso las fuerzas generalizadas tiene por valor

$$Q_j = \sum_{i=1}^P \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^P \frac{\partial V(\{\mathbf{r}_j\}_{j=1}^P)}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V(\{q_j\}_{j=1}^N)}{\partial q_j} , \quad (14)$$

y las ecuaciones de Lagrange se pueden reescribir como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 , \quad (15)$$

siendo  $L$  la **función lagrangiana**

$$L = L(\{q_i\}_{i=1}^N, \{\dot{q}_i\}_{i=1}^N, t) = T(\{q_i\}_{i=1}^N, \{\dot{q}_i\}_{i=1}^N, t) - V(\{q_i\}_{i=1}^N, t) . \quad (16)$$

Una situación habitual es aquella en la que el sistema está sometido a fuerzas (o pares) conocidos, ya sea constantes o como funciones del tiempo. Si la fuerza  $\mathbf{f}(t)$  está aplicada sobre el punto de coordenadas  $\mathbf{r}$  la energía potencial asociada es

$$V = -\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{r} . \quad (17)$$

Expresando  $\mathbf{r}$  en función de la coordenadas generalizadas siempre se puede escribir

$$V = -\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{r}(\{q_j\}_{j=1}^N) . \quad (18)$$

en el caso de una única fuerza o

$$V = - \sum_a \mathbf{f}_a(t) \cdot \mathbf{r}_a(\{q_j\}_{j=1}^N) - \sum_b \mathbf{m}_b(t) \cdot \boldsymbol{\theta}_b(\{q_j\}_{j=1}^N) \quad (19)$$

cuando se aplican varias fuerzas  $\mathbf{f}_a$  y pares  $\mathbf{m}_b$ .

La expresión (15) es la que se usa con más frecuencia así que habitualmente nos referiremos a esta cuando hablemos de las ecuaciones de Lagrange.

Hay aplicaciones importantes en mecánica en las que las fuerzas dependen de la velocidad, o no derivan de un potencial. Estos casos son más complicados de tratar pero hay una excepción que admite un tratamiento sencillo,

a saber, aquel en el que las fuerzas generalizadas derivan de un potencial  $V = V(\{q_i\}_{i=1}^N, \{\dot{q}_i\}_{i=1}^N)$  de la forma

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} . \quad (20)$$

En esta situación especial las ecuaciones de Lagrange en la forma (15) siguen siendo válidas. También es habitual separar las fuerzas en dos contribuciones: las que derivan de un potencial  $V$  y el resto. En dicho caso las ecuaciones de Lagrange se pueden escribir como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j , \quad (21)$$

donde ahora  $Q_j$  son las fuerzas generalizadas que no dependen de un potencial. Por ejemplo, si un sistema está sometido a fuerzas de fricción, se puede definir un *potencial disipativo*  $\Phi$  de la forma

$$\Phi = \sum_{i=1}^P \frac{\mu}{2} |\mathbf{v}_i|^2 , \quad (22)$$

de tal manera que las fuerzas de fricción sean

$$\mathbf{f}_i = -\mu \mathbf{v}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}_i} . \quad (23)$$

Estas fuerzas de fricción se pueden reescribir usando coordenadas generalizadas pues

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} . \quad (24)$$

En este caso las ecuaciones de Lagrange se escriben como

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} . \quad (25)$$

Las ecuaciones de Lagrange tienen muchas ventajas frente a las que se obtienen del equilibrio de fuerzas. En primer lugar, la función lagrangiana es escalar y su manipulación mucho más sencilla que la de las fuerzas, velocidades y aceleraciones, que son cantidades vectoriales. En segundo lugar, una vez que la lagrangiana se conoce, las ecuaciones del movimiento se pueden hallar de forma sistemática, incluso con un programa de manipulación simbólica, sin necesidad de diagramas, proyecciones, ni consideraciones geométricas.

Para formular las ecuaciones de Lagrange de los sólidos rígidos se puede seguir el mismo proceso. En vez de considerar el principio de D'Alembert para un número finito de partículas con masa se postula para todos los diferenciales

de masa. Además, las coordenadas generalizadas que definen el movimiento de los infinitos puntos de un sólido rígido son sólo seis (en el espacio) o tres (en el plano). Sin entrar en los detalles de esta deducción, pueden darse por válidas las ecuaciones de Lagrange en todos los casos.

▷ **Ejemplo 2.1.** *Encontrar las ecuaciones del movimiento de la partícula del ejemplo 1.1 si está sometida a una fuerza gravitatoria vertical hacia abajo con aceleración  $g$  y el disco tiene una inercia  $I$ .*

*La velocidad de la partícula es  $\mathbf{v} = \dot{l}\mathbf{e}_r + l\dot{\alpha}\mathbf{e}_\theta$ , donde  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta\}$  son los vectores unitarios de una base polar. La función lagrangiana es*

$$L = \frac{m}{2}(\dot{l}^2 + l^2\dot{\alpha}^2) + \frac{I}{2}\dot{\alpha}^2 - mgl \sin \alpha . \quad (26)$$

*y las dos ecuaciones de Lagrange para el sistema son, por tanto,*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(m\dot{l}) - ml\dot{\alpha}^2 - mg \sin \alpha , \\ 0 &= \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\alpha} + I\dot{\alpha}) - mgl \cos \alpha . \end{aligned} \quad (27)$$

◁

▷ **Ejemplo 2.2.** *Encontrar las ecuaciones del movimiento del péndulo doble de la figura 1.*

*En un sistema cartesiano de base  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ , siendo  $\mathbf{i}$  un vector unitario horizontal hacia la derecha y  $\mathbf{j}$  vertical hacia arriba, los vectores de posición de las dos masas son:*

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= a \sin \alpha \mathbf{i} - a \cos \alpha \mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1 + b \sin \beta \mathbf{i} - b \cos \beta \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (28)$$

*Las velocidades de estos puntos son, por tanto,*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= a\dot{\alpha}(\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}), \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 + b\dot{\beta}(\cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j}). \end{aligned} \quad (29)$$

*La energía cinética y la potencial son, respectivamente,*

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left( a^2(m_a + m_b)\dot{\alpha}^2 + 2abm_b\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + b^2m_b\dot{\beta}^2 \right) , \\ V &= agm_a \cos(\alpha) - gm_b(-a \cos \alpha - b \cos \beta). \end{aligned} \quad (30)$$

*Por lo tanto, las dos ecuaciones de Lagrange son*

$$\begin{aligned} 0 &= a \left( a(m_a + m_b)\ddot{\alpha} + bm_b(\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)) - g \sin \alpha(m_a + m_b) \right) , \\ 0 &= bm_b \left( a\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - a\dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta) + b\ddot{\beta} - g \sin \beta \right) . \end{aligned} \quad (31)$$

◁

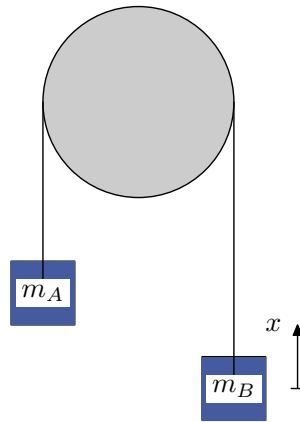


Figura 4: Ejemplo 2.3.

▷ **Ejemplo 2.3.** Encontrar las ecuaciones del movimiento de una polea de radio  $r$  y momento de inercia  $I$ , y dos masas  $m_A, m_B$  tal y como aparecen en la figura 4.

Cuando la coordenada generalizada es  $x$  (ver figura), las energías cinética y potencial del conjunto son:

$$T = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 \quad (32)$$

$$V = (m_B - m_A)gx ,$$

y la función lagrangiana  $L = T - V$ . La ecuación de Lagrange, para la única coordenada generalizada  $q_1 = x$ , es

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = (m_A + m_B + \frac{I}{r^2})\ddot{x} - (m_B - m_A)g. \quad (33)$$

◁

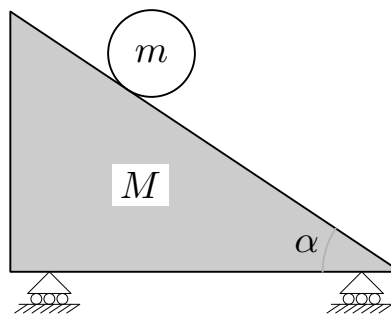


Figura 5: Ejemplo 2.4.



▷ **Ejemplo 2.4.** Encontrar las ecuaciones del movimiento del un disco de radio  $r$  y masa  $m$  que rueda sin deslizar por un plano inclinado de masa  $M$  que se puede deslizar sin rozamiento sobre el plano horizontal (ver figura 5).

Las coordenadas generalizadas pueden tomarse como  $q_1 = x$ , el desplazamiento horizontal del plano inclinado, y  $q_2 = \theta$ , el ángulo de giro del disco. Con esta elección, la energía cinética y potencial del sistema son:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + (r\dot{\theta})^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}r \cos \alpha) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \\ V &= -mg\theta r \sin \alpha, \end{aligned} \quad (34)$$

siendo  $I = \frac{1}{2}mr^2$  la inercia del disco respecto a un eje que pasa por su centro de gravedad y es perpendicular al plano de la figura. Las ecuaciones de Lagrange son, por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} (M\dot{x} + m(\dot{x} + \dot{\theta}r \cos \alpha)) \\ 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} (m(r^2\dot{\theta} + \dot{x}r \cos \alpha) + I\dot{\theta}) - mgr \sin \alpha. \end{aligned} \quad (35)$$

◁

▷ **Ejemplo 2.5.** Una masa  $M$  se mueve sobre un plano cuando sobre ésta actúa una fuerza  $f(t) = A \cos(\omega t)$  en dirección del eje  $x$ . Además, la masa está unida a una pared vertical mediante un muelle elástico de constante  $K$  y un amortiguador de constante  $\mu$ . Encontrar la ecuación de movimiento del sistema.

La energía cinética y la potencial son, respectivamente

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2}kx^2 - A \cos(\omega t) x$$

y la función lagrangiana  $L = T - V$ . El potencial disipativo tiene por expresión

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2,$$

y por tanto la ecuación del movimiento es

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} \\ &= \frac{d}{dt} (M\dot{x}) - (-kx + A \cos(\omega t)) + \mu\dot{x}. \end{aligned}$$

◁

### 3. Leyes de conservación

Las ecuaciones de Lagrange permiten identificar las constantes del movimiento de manera mucho más sencilla que las de Newton-Euler. El ejemplo más sencillo es el de las *coordenadas cíclicas*, aquellas coordenadas generalizadas  $q_k$  que no aparecen de manera explícita en la función lagrangiana (aunque sus velocidades generalizadas sí pueden aparecer). Si  $q_k$  es una coordenada cíclica su correspondiente ecuación de Lagrange será

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} . \quad (36)$$

Llamando *momento generalizado* a la cantidad  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$  concluimos que toda coordenada cíclica tiene asociado un momento generalizado que se conserva en el movimiento. Estos momentos generalizados pueden ser las componentes de la cantidad de movimiento, del momento cinético, o incluso otras cantidades que dependen del problema en cuestión y que suelen ser muy interesantes para comprender de manera cualitativa su trayectoria.

La *ley de la conservación de la energía* tiene una relevancia mayor y la estudiamos con más detalle. En el contexto de la mecánica analítica, se define la energía de un sistema como la función

$$E = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) , \quad (37)$$

siendo, como antes,  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ . Si la función lagrangiana no depende explícitamente del tiempo calculamos

$$\frac{d}{dt} E = \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] . \quad (38)$$

Los términos primero y tercero se anulan por las ecuaciones de Lagrange. Los otros dos también se cancelan por la definición del momento generalizado. Concluimos que si la función lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, la energía del sistema se conserva.

### 4. El principio de Hamilton

La mecánica analítica tiene una fundamentación más abstracta e interesante que la presentada hasta ahora. Es más abstracta porque ni siquiera necesita el principio de D'Alembert para encontrar las ecuaciones de Lagrange; más interesante porque indica que hay un principio variacional detrás de la mecánica, lo cual abre la puerta tanto a métodos de análisis matemático como a aproximaciones numéricas.

La base de este enfoque es el llamado *principio de Hamilton*. Para enunciarlo consideremos una curva  $\{q_i(t)\}$  con  $t \in [0, T]$  en el espacio de

coordenadas generalizadas. Se define la **acción** de un sistema en un intervalo de tiempo como

$$S = \int_0^T L(\{q_i(t)\}, \{\dot{q}_i(t)\}, t) dt . \quad (39)$$

El principio de Hamilton establece que la acción es estacionaria para la curva  $\{q_i(t)\}$  en la que el sistema se encuentra en equilibrio.

Para comprender por qué las ecuaciones de Lagrange son una consecuencia del principio de Hamilton es necesario calcular las condiciones de estacionaridad de la acción. Esta integral es una función de funciones, un objeto que en matemáticas se denomina **funcional**. Para encontrar los puntos estacionarios de este funcional hay que recurrir al llamado **cálculo variacional**, un conjunto de técnicas de cálculo extremadamente útil en muchas ramas de la física (mecánica, óptica, transmisión de calor, etc.). Para presentarlo estudiamos primero la estacionaridad de un funcional de la forma

$$S[q] = \int_0^T L(q(t), \dot{q}(t)) dt , \quad (40)$$

siendo  $q : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $q[0] = a$  y  $q[T] = b$ , y  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Si  $\bar{q}$  es la función que hace estacionario el funcional  $S$  y  $\delta q : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  es cualquier otra función tal que  $\delta q(0) = \delta q(T) = 0$  entonces

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} S[\bar{q} + \epsilon \delta q] = 0 . \quad (41)$$

Evaluando esta integral más explícitamente se obtiene

$$0 = \int_0^T \left[ \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{q}(t), q(t)) \delta \dot{q}(t) \right] dt. \quad (42)$$

Integrando por partes el segundo sumando se sigue que

$$0 = \int_0^T \left[ \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) \delta q(t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{q}(t), q(t)) \delta q(t) \right] dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{q}(t), q(t)) \delta q(t) \right]_a^b . \quad (43)$$

Pero a la vista de la definición de la variación  $\delta q(t)$  el término en el segundo corchete se anula. Finalmente, la condición de estacionaridad del funcional  $S$  es por tanto

$$0 = \int_0^T \left[ \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{q}(t), q(t)) \right] \delta q(t) dt , \quad (44)$$

siendo  $\delta q(t)$  cualquier función con  $\delta q(0) = \delta q(T) = 0$ . Esta última identidad sólo se puede satisfacer si el término en el corchete se anula y se concluye que  $q$  es la función que hace estacionario  $S$  si y sólo si satisface

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\dot{q}(t), q(t)), \quad (45)$$

con las condiciones  $\delta q(0) = a$ ,  $\delta q(T) = b$ . Esta última identidad se conoce como la **ecuación de Euler-Lagrange** asociada a  $S$ . Lo que el cálculo variacional consigue es transformar un problema que busca una función que hace estacionario un funcional y lo transforma en un problema de valores de contorno, es decir, una ecuación diferencial donde se conocen los valores de la solución en sus extremos.

El procedimiento descrito anteriormente se puede generalizar al caso en el que el integrando dependa de  $N$  funciones  $\{q_i(t)\}_{i=1}^N$  con sus valores en los extremos conocidos. El resultado entonces coincidiría con las ecuaciones de Lagrange (15).

Este enfoque abstracto de la mecánica tiene ventajas que no se aprecian a primera vista. Por ejemplo, las leyes de conservación aparecen de manera natural como consecuencia de aquellas transformaciones de las trayectorias  $q_i(t)$  que no modifican el valor de la acción. Además, la mecánica relativista también se puede presentar de una manera muy elegante como una extensión de la mecánica lagrangiana sin más que definir una acción en espacio-tiempo, la llamada acción de Lorentz.

## 5. Sistemas con restricciones

El tratamiento de las restricciones en la mecánica analítica es relativamente sencillo a partir del principio de acción estacionaria. Si un sistema mecánico evoluciona en el espacio de coordenadas generalizadas  $\{q_i\}$  pero existen  $K$  relaciones entre ellas de la forma  $\phi_k(\{q_i\}) = 0$  entonces la acción que debe de ser estacionaria es

$$S = \int_0^T \left[ L(\{q_i(t)\}, \{\dot{q}_i(t)\}, t) - \sum_{k=1}^K \phi_k(\{q_i(t)\}) \lambda_k(t) \right] dt, \quad (46)$$

siendo  $\lambda_k$  el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción  $k$ . Un cálculo similar al del problema sin restricciones resulta en las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_k \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i} = 0, \quad \phi_k(\{q_i\}) = 0. \quad (47)$$

Estas ecuaciones de restricción corresponden a **ligaduras holónomas**. El caso de ligaduras anholónomas es abordable siempre que estas sean de la forma

$$\sum_{i=1}^N A_{ki}(\{q_j\}, t) \dot{q}_i + B_k(\{q_j\}, t) = 0. \quad (48)$$

En esta situación se puede demostrar que las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^K \lambda_k A_{ki} = 0, \quad \sum_{i=1}^N A_{ki}(\{q_j\}, t) \dot{q}_i + B_k(\{q_j\}, t) = 0. \quad (49)$$

En todas las situaciones anteriores los multiplicadores de Lagrange actúan como fuerzas responsables de imponer la restricción correspondiente.

▷ **Ejemplo 5.1.** *Dos masas puntuales iguales, de valor  $m$ , se mueven en una recta vertical a distancia fija  $\ell$ . Encontrar las ecuaciones de su movimiento por el método de los multiplicadores de Lagrange y verificar que se mueven como una masa de valor  $2m$ .*

*Si las coordenadas generalizadas son  $q_1, q_2$ , que se refieren a la altura de cada una de las masas, las energías cinética y potencial del sistema son, respectivamente,*

$$T = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) , \quad V = -mg(q_1 + q_2) . \quad (50)$$

*La restricción entre las dos coordenadas generalizadas se puede escribir como  $\phi = 0$ , siendo*

$$\phi(q_1, q_2) = q_1 - q_2 - \ell . \quad (51)$$

*Las ecuaciones de Lagrange para las coordenadas  $q_1, q_2$  son por tanto*

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 - mg - \lambda &= 0 , \\ m\ddot{q}_2 - mg + \lambda &= 0 , \\ q_1 - q_2 - \ell &= 0 . \end{aligned} \quad (52)$$

*Sumando las dos primeras ecuaciones se puede eliminar el multiplicador de Lagrange, resultando:*

$$2m \frac{\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2}{2} - 2mg = 0 , \quad (53)$$

*que es la ecuación del movimiento de una partícula de masa  $2m$  colocada en el centro de gravedad  $(q_1 + q_2)/2$ . ◁*

## Bibliografía

- [1] H Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 2nd edition, 1980.
- [2] V I Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer, 1989.