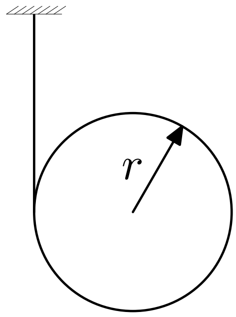
Simulación de sistemas mecánicos.
Mecánica analítica

I. Romero

7 de octubre de 2019

1. Un yo-yo de radio r y masa m cae debido a la fuerza de la gravedad. Si la cuerda enrollada en el mismo está atada a un punto fijo, determinar las ecuaciones del movimiento del cuerpo.

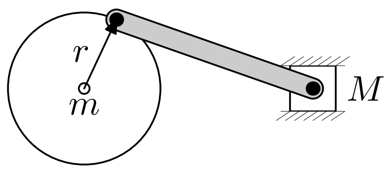


2. Un disco de masa m y radio r está unido a una manivela de longitud ℓ y masa despreciable que mueve un pistón de masa M. Determinar:

a) El número de grados de libertad del sistema y un sistema de coordenadas generalizadas.

b) La función lagrangiana.

c) Las ecuaciones del movimiento.



3. Una barra de longitud ℓ y masa m está atada a un punto fijo por un hilo sin masa e inextensible de longitud a. Si la barra cae debido a la fuerza de la gravedad, se pide

a) El número de grados de libertad del sistema y un sistema de coordenadas generalizadas.

b) La función lagrangiana.

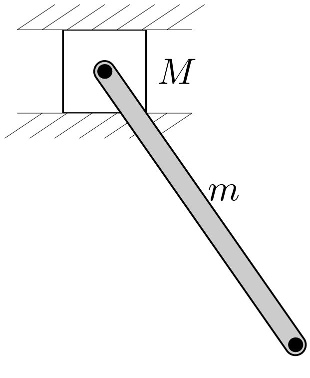
c) Las ecuaciones del movimiento.

4. Una masa M se desliza por un ranura sin rozamiento. Conectada a la primera por una articulación hay una barra de masa m y longitud l. Si actúa la fuerza de la gravedad sobre el sistema, determinar:

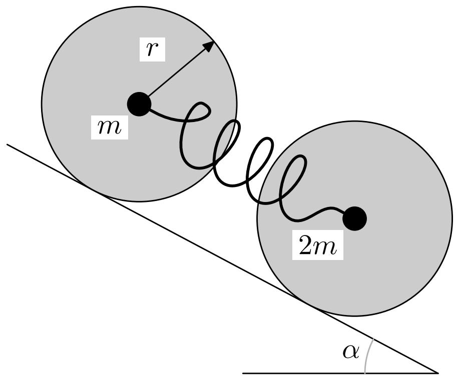
a) El número de grados de libertad del sistema y un sistema de coordenadas generalizadas.

b) La función lagrangiana.

c) Las ecuaciones del movimiento.



5. Dos discos de radio r, uno de masa m y otro de masa $2m$ ruedan sin deslizar por un plano inclinado de ángulo α, unidos por un muelle de longitud natural $2r$ y constante k. Si el sistema está sometido a la fuerza de la gravedad, determinar las ecuaciones del movimiento



a) Formulando un sistema con dos coordenadas generalizadas.

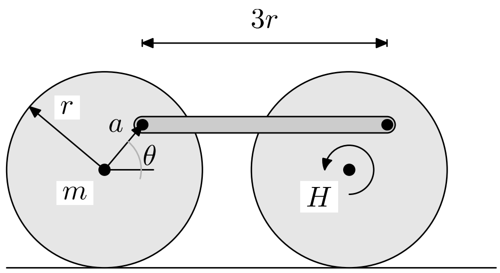
b) Formulando un sistema con cuatro coordenadas generalizadas $(x_1, \theta_1, x_2, \theta_2)$ y dos ecuaciones de restricción.

6. Hallar las ecuaciones del movimiento de un péndulo de longitud l y masa m cuando su punto de suspensión:

a) Está sometido a una fuerza horizontal $f(t) = F \sin(\omega t)$.

b) Oscila con un posición $x(t) = X \sin(\omega t)$.

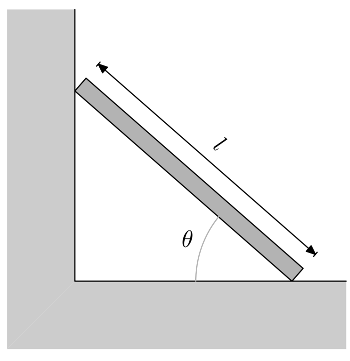
7. Dos discos iguales de radio r y masa m están conectados por una varilla de masa M y longitud $3r$. La varilla se conecta a cada uno de los discos en un punto a distancia $a = r/2$ del centro del mismo. Determinar las ecuaciones de Lagrange del cuerpo si está sometido a la acción de la gravedad y de un par constante H que hacer girar al disco de la derecha. Emplear para ello dos métodos distintos:



a) Encontrar el número mínimo de coordenadas generalizadas y, después de formular la función Lagrangiana, encontrar las ecuaciones del movimiento.

b) Usar un sistema con 9 coordenadas generalizadas (3 por cada cuerpo rígido), definir las restricciones necesarias y encontrar las ecuaciones del movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange con multiplicadores.

8. Una varilla de longitud l y masa m se desliza debido a su peso apoyada sobre una pared como indica la figura. Teniendo en cuenta tanto la masa como la inercia de la varilla,



a) Encontrar la ecuación de Lagrange para el sistema utilizando un único grado de libertad θ, y sin ecuaciones de restricción.

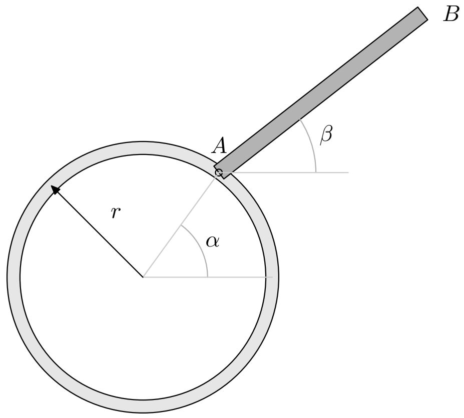
b) Encontrar las ecuaciones del movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange con restricciones cuando la configuración de la varilla se describe con 3 coordenadas generalizadas (las coordenadas (x, y) del centro de gravedad y su ángulo de giro α).

9. Una varilla AB de longitud l, masa m e inercia J respecto de su centro de masa se mueve mientras su extremo A desliza sin rozamiento por un aro fijo de radio r. Si la varilla está sometida a la fuerza de la gravedad:

a) Calcular la función lagrangiana L para el sistema utilizando los grados de libertad generalizados α y β (sin utilizar ecuaciones de restricción).

b) Encontrar las ecuaciones de Lagrange del sistema a partir de la función L.

c) Formular la función lagrangiana describiendo la configuración del sistema con 3 coordenadas generalizadas (las coordenadas (x, y) del centro de gravedad de la varilla y su ángulo de giro β) y una restricción holónoma.

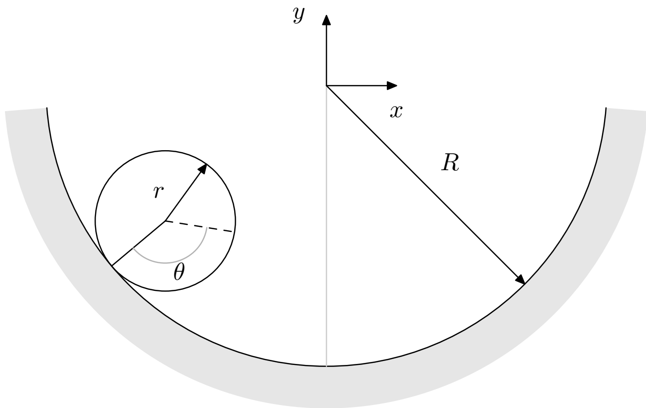


10. Un disco de masa m y radio r rueda sin deslizar en una cavidad circular de radio R y sometido a la aceleración g de la gravedad.

a) Calcular la función lagrangiana L para el sistema en función únicamente del grado de libertad θ que es el ángulo rodado por el disco.

b) Encontrar las ecuaciones de Lagrange del sistema a partir de la función L.

c) Formular la función lagrangiana describiendo la configuración del sistema con 3 coordenadas generalizadas (las coordenadas (x, y) del centro de gravedad del disco y su ángulo de giro θ) y dos restricciones holónomas.

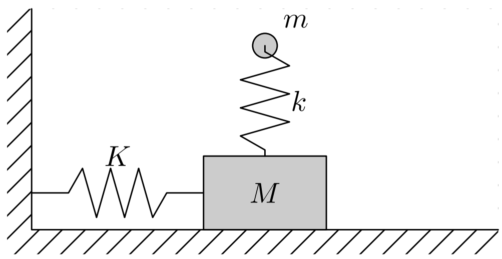


11. Un masa M se desplaza horizontalmente, unida a una pared mediante un muelle elástico de constante K. Sobre esta primera masa, otra de valor m se mueve verticalmente, conectada con la primera por un muelle elástico de constante k. Si todo el sistema está sometido a la gravedad,

a) Encontrar el número de coordenadas generalizadas del sistema.

b) Formular la energía cinéticas y la potential, encontrando la expresión de la función lagrangiana.

c) Derivar las ecuaciones de Lagrange.



12. Dos partículas iguales de masa m se mueven sobre la parábola

$$y = \frac{4}{L}x^2$$

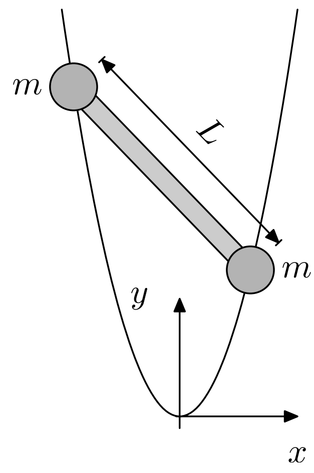
sometidas a la gravedad y a una distancia relativa de L. Se desea estudiar la dinámica del sistema empleando cuatro grados de libertad x_1, y_1, x_2, y_2 y restricciones.

a) Formular las restricciones holónomas del sistema.

b) Encontrar la función lagrangiana.

c) Derivar las ecuaciones de Lagrange teniendo en cuenta las restricciones.

d) Indicar el sentido físico de cada multiplicador de Lagrange.



13. Demuestra, empleando cálculo variacional, que la curva de menor longitud que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) del plano es la recta entre ambos. Para ello calcula las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, \mathrm{d}x \ ,$$

explicando el significado geométrico de dicha integral.

14. Una viga biapoyada y sometida a una carga uniforme w vertical hacia abajo tiene una energía cuya expresión es:

$$V[w] = \int_0^L \frac{EI}{2} w'''' \, \mathrm{d}x + \int_0^L qw \, \mathrm{d}x \ ,$$

siendo L la longitud de la viga y EI la rigidez a flexión de la sección. Si se sabe que la viga en equilibrio adquiere una forma $w = w(x)$ que minimiza su energía, calcular ésta sabiendo que es la función que minimiza V entre todas las que satisfacen

$$w(0) = w(L) = w'''(0) = w'''(L) = 0 \ .$$

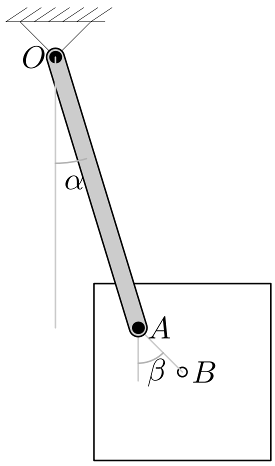
15. Se desea construir una rampa de tal manera que al dejar caer una bola desde el punto (x_1, y_1) ésta llegue rodando hasta el punto (x_2, y_2), con $y_1 > y_2$, en el menor tiempo posible. Para ello,

- Demostrar que el tiempo que tarda la bola en recorrer el camino entre los dos puntos, si rueda sobre la curva $y = y(x)$, es proporcional a

$$T[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y_1 - y}}\, \mathrm{d}x \ .$$

- Encontrar la expresión de $y(x)$ empleando cálculo de variaciones.

16. Un varilla de longitud l y masa m gira sobre un punto fijo O y está conectada a un cuadrado de lado a y masa M en el punto A de manera que ambos cuerpos pueden girar de manera independiente. Si el punto A se encuentra sobre la diagonal del cuadrado y a la misma distancia de la esquina que del centro de éste, calcular las ecuaciones de Lagrange del sistema cuando está sometido a la gravedad

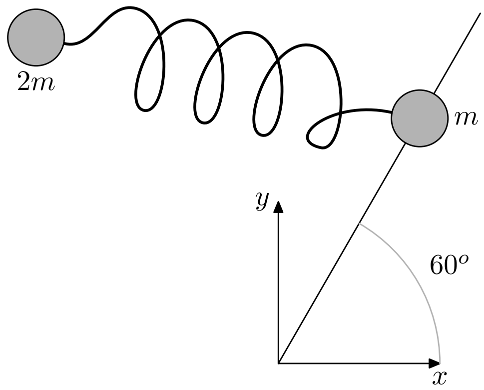


a) Considerando que el sistema tiene dos coordenadas generalizadas α y β, sin ninguna restricción (4 puntos).

b) Considerando después que el sistema tiene 6 coordenadas generalizadas $(x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2)$ y 4 restricciones holónomas. Para este caso, explicar el significado de cada restricción (3 puntos).

c) Para el caso (a), además, resolver el sistema de ecuaciones usando `lmsolver` con datos $l = 0{,}4$ m, $a = 0{,}2$ m, $m = 1$ kg, $M = 2$ kg, $\alpha_0 = \pi/10$ rad, $\beta_o = \pi/4$ rad, $\dot{\alpha}_0 = \dot{\beta}_0 = 0$ rad/s (3 puntos).

17. Una masa m se desliza por una varilla recta que forma 60^o con la horizontal. Dicha masa está conectada con otra masa de valor $2m$ mediante un muelle elástico de masa nula y constante k cuya longitud natural es cero. Si el sistema está sometido a la aceleración de la gravedad



a) Indicar el número de grados de libertad del sistema.

b) Tomando como coordenadas generalizadas las coordenadas de masa m que denominamos (x_1, y_1) y las de la masa $2m$ que denominamos a su vez (x_2, y_2), formular la energía cinética y la potencial del sistema.

c) Encontrar, si existen, las ecuaciones de restricción del sistema.

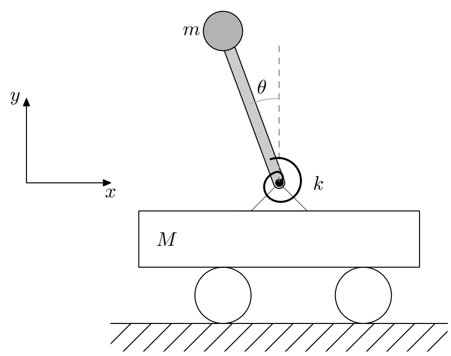
d) Formular las ecuaciones del movimiento del sistema incluyendo las que derivan de las restricciones, si las hubiera.

e) Indicar qué condiciones iniciales son necesarias para la formulación completa del problema.

18. Un vehículo de masa M se puede mover horizontalmente y lleva encima un péndulo invertido de longitud l y masa m. El péndulo está conectado al vehículo por un resorte de torsión, de constante k y sometido a la aceleración g de la gravedad. Si la energía potencial del resorte es

$$V = \frac{k}{2}\theta^2 \ ,$$

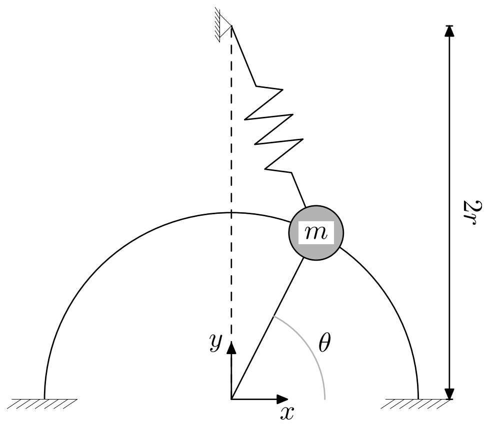
siendo θ el ángulo que forma el péndulo con la vertical.



a) Tomando como coordenadas generalizadas la coordenada x del vehículo y el ángulo θ del péndulo, encontrar la función lagrangiana del sistema y las ecuaciones de Lagrange.

b) Obtener la solución del problema durante 5 s usando el programa `lmsolver` usando dos coordenadas generalizadas, los datos $M = 20$ kg, $m = 3$ kg, $l = 0{,}7$ m y las condiciones iniciales $x(0) = 0$ m, $\dot{x}(0) = 3$ m/s, $\theta(0) = -\pi/8$ rad, $\dot{\theta}(0) = 0$ rad/s, $k = 8$ N $\cdot$ m/rad, $g = 9{,}8$ m/s^2. Dibujar, de manera aproximada, la evolución en el tiempo de las dos coordenadas generalizadas.

19. Una masa puntual m se mueve sobre un semi aro de radio r. La masa está unida mediante un muelle de constante k a un punto fijo situado a una distancia $2r$ en la vertical sobre el centro del aro. La masa está sometida además a la acción de la gravedad.



a) Tomando como único grado de libertad del sistema el ángulo θ, desarrollar la expresión de las energías potencial y cinética.

b) Evaluar las ecuaciones de Lagrange para el sistema expresado en función de θ.

c) Tomando ahora como coordenadas generalizadas del sistema la posición (x, y) de la masa puntual, evaluar las energías potencial y cinética.

d) Para este sistema, indicar cuáles son las ecuaciones de restricción, construir la función Lagrangiana y derivar las ecuaciones de Lagrange.