Dinámica analítica del sólido rígido

I. Romero

Universidad Politécnica de Madrid, José Gutiérrez Abascal, 2,
28006 Madrid, Spain

11 de octubre de 2020

Las ecuaciones de la dinámica del sólido rígido se obtienen de manera estándar si se emplea el formalismo de la mecánica analítica. Para ello, basta con seleccionar *seis* coordenadas generalizadas que determinen de manera unívoca su configuración. La manera más habitual consiste en emplear tres coordenadas para situar el centro del gravedad del sólido y los tres parámetros restantes para definir su orientación. En libros de mecánica clásica es habitual utilzar los tres ángulos de Euler para determinar la orientación del sólido, aunque no es la única menara posible [1]. Una vez la configuración se determina, se puede a partir de esta encontrar la energía potential y la cinética y, de ambas, la función lagrangiana.

El uso de ángulos de Euler complica bastante la formulación de la energía cinética. Existe un camino alternativo para la formulación de las ecuaciones de la dinámica que se basa en las ecuaciones de Lagrange con restricciones y que evita completamente el uso de ángulos de Euler. Explicamos este procedimiento a continuación.

1. Configuración con restricciones

Definimos un sólido rígido como un conjunto $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$. El centro de gravedad de este sólido es el punto $\boldsymbol{x}_G$ definido como

$$\boldsymbol{x}_G := \frac{1}{V} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{x} \, \mathrm{d}V \ . \tag{1}$$

Sobre el cuerpo se define un triedro directo $\{\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3\}$ con origen en el centro de gravedad, vectores alineados con las direcciones principales de inercia, y que se mueve solidariamente al cuerpo. En este sistema, cualquier punto $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}$ tiene por coordenadas (ξ^1, ξ^2, ξ^3) de tal manera que

$$0 = \int_{\mathcal{B}} \xi^i \, \mathrm{d}V, \tag{2}$$

con $i = 1, 2, 3$. Por tanto, en todo instante t, la posición de un punto $\boldsymbol{x}$ del cuerpo tiene por expresión

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_G(t) + \sum_i \xi^i \boldsymbol{d}_i(t) \ . \tag{3}$$

Nótese que en esta expresión las coordenadas ξ^i son constantes pero que los vectores de la base $\boldsymbol{d}_i$ dependen del instante. La expresión (3) define completamente la configuración del cuerpo rígido a partir de las 3 componentes del vector de posición del centro de grevedad y las 9 componentes de los *directores* $\boldsymbol{d}_i$. Como estos últimos son ortonormales se deben de cumplir, en todo instante, las seis restricciones siguientes:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{d}_i|^2 - 1 = 0, &\quad i = 1,2,3 \\ \boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{d}_j, = 0 &\quad i,j = 1,2,3,\ i \neq j. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Energía potencial y cinética

La energía potencial gravitatoria de un cuerpo rígido con la descripción anterior es simplemente

$$V := -\int_{\mathcal{B}} \rho\, \boldsymbol{x}_G \cdot \boldsymbol{g}\, \mathrm{d}V = -m\, \boldsymbol{x}_G \cdot \boldsymbol{g} \tag{5}$$

siendo ρ la densidad del cuerpo, $\boldsymbol{g}$ el vector de aceleración de la gravedad y m la masa total. Para calcular la expresión de la energía cinética comenzamos por derivar la expresión (3) con respecto al tiempo para obtener la velocidad

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{v}_G + \sum_i \xi^i \dot{\boldsymbol{d}}_i(t)\ , \tag{6}$$

donde hemos definido $\boldsymbol{v}_G = \dot{\boldsymbol{x}}_G$. La expresión de la energía cinética es

$$T := \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho}{2} |\boldsymbol{v}|^2\, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho}{2} \left(|\boldsymbol{v}_G|^2 + 2\sum_i \xi^i \boldsymbol{v}_G \cdot \dot{\boldsymbol{d}}_i + \sum_{i,j} \xi^i \xi^j \dot{\boldsymbol{d}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{d}}_j \right) \mathrm{d}V. \tag{7}$$

En el primer término de la integral se identifica la energía cinética de traslación. El segundo término se puede evaluar como

$$\int_{\mathcal{B}} 2 \sum_i \xi^i \boldsymbol{v}_G \cdot \dot{\boldsymbol{d}}_i\, \mathrm{d}V = 2 \sum_i (\boldsymbol{v}_G \cdot \dot{\boldsymbol{d}}_i) \int_{\mathcal{B}} \xi^i\, \mathrm{d}V = 0, \tag{8}$$

de acuerdo con la relación (2). Finalmente, para evaluar la tercera integral en la ecuación (7) se definen las inercias

$$J^{ij} := \int_{\mathcal{B}} \rho \xi^i\, \xi^j\, \mathrm{d}V\ , \tag{9}$$

y se observa que al haber escogido los directores en las direcciones principales de inercia, $J^{ij} =$ cuando $i \neq j$. Por tanto, la tercera integral de la ecuación (7), que corresponde con la energía cinética de rotación, es simplemente

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\rho}{2} \sum_{i,j} \xi^i\, xi^j \dot{\boldsymbol{d}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{d}}_j\, \mathrm{d}V = \sum_i \frac{1}{2} J^{ii} \dot{\boldsymbol{d}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{d}}_i = \sum_i \frac{1}{2} J^{ii} |\dot{\boldsymbol{d}}_i|^2\ . \tag{10}$$

Finalmente, combinando la energía cinética de traslación y rotación se sigue que

$$T = \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}_G|^2 + \sum_i \frac{1}{2} J^{ii} |\dot{\boldsymbol{d}}_i|^2\ . \tag{11}$$

Hay que resaltar que las inercias J^{ii} no son las que se emplean habitualmente en mecánica de sólidos, aunque ambos tipos están relacionadas. La razón por la que aparece este "nuevo" tipo de inercia es porque, como se puede apreciar, no se emplea en ningún momento la noción de velocidad angular.

3. Función Lagrangiana

Un cuerpo rígido, por tanto, posee una función Lagrangiana que depende de 12 coordenadas generalizadas $(\boldsymbol{x}_G, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3)$ y 6 multiplicadores de Lagrange. Esta es:

$$\begin{aligned} L =& \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}_G|^2 + \sum_i \frac{1}{2} J^{ii} |\dot{\boldsymbol{d}}_i|^2 + m\, \boldsymbol{x}_G \cdot \boldsymbol{g} \\ & - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (|\boldsymbol{d}_i|^2 - 1) - \sum_{\substack{i=1 \\ j=i+1}}^{3} \mu_{ij}\, \boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{d}_j \ . \end{aligned} \tag{12}$$

Referencias

[1] H Goldstein. *Classical Mechanics.* Addison-Wesley, 2nd edition, 1980.