

---

# Introducción a la mecánica de los sólidos deformables

---

**Ignacio Romero Olleros**

E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

4 de Febrero, 2014



# Índice

<b>Capítulo 1. Álgebra y cálculo tensorial.....</b>	<b>1</b>
<b>1. Vectores y campos vectoriales.....</b>	<b>2</b>
1.1. Componentes y cambio de base.....	2
1.2. Operaciones algebraicas.....	3
1.3. Cálculo vectorial.....	4
<b>2. Tensores y campos tensoriales.....</b>	<b>5</b>
2.1. Componentes y cambio de base.....	6
2.2. Operaciones algebraicas.....	7
2.3. Tensores con propiedades especiales.....	8
2.4. Descomposiciones de tensores.....	9
2.5. Autovectores y autovalores.....	10
2.6. Cálculo tensorial.....	11
<b>3. Problemas.....</b>	<b>13</b>
<b>Capítulo 2. Estudio del equilibrio.....</b>	<b>15</b>
<b>1. El modelo del sólido deformable.....</b>	<b>15</b>
<b>2. Fuerzas que actúan sobre los sólidos deformables.....</b>	<b>16</b>
2.1. Fuerzas volumétricas.....	17
2.2. Fuerzas de superficie o de contacto.....	17
<b>3. Fuerzas internas en un cuerpo deformable.....</b>	<b>18</b>
<b>4. El tensor de tensiones.....</b>	<b>21</b>
4.1. Interpretación física de las componentes del tensor de tensiones.....	24

<b>5. Ecuaciones de equilibrio</b> .....	25
5.1. Principio fundamental.....	25
5.2. Equilibrio de fuerzas.....	27
5.3. Equilibrio de momentos.....	27
<b>6. Tensiones principales y direcciones principales de tensión</b> .....	28
<b>7. Representación gráfica de un tensor de tensiones</b> .....	29
<b>8. Problemas</b> .....	35
<b>Capítulo 3. Análisis de la deformación de los cuerpos</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>1. Introducción</b> .....	45
<b>2. Cinemática de un cuerpo deformable</b> .....	46
<b>3. Cálculo de deformaciones. El tensor de deformación infinitesimal</b> .....	49
3.1. El tensor de deformaciones infinitesimales.....	49
3.2. Cálculo de deformaciones longitudinales.....	50
3.3. Cálculo de deformaciones angulares.....	52
3.4. Interpretación geométrica de las componentes del tensor de deformación.....	54
<b>4. La deformación volumétrica</b> .....	56
<b>5. Deformaciones principales y direcciones principales de deformación</b> .....	58
<b>6. Galgas extensométricas</b> .....	59
<b>7. El diagrama de Mohr de deformaciones</b> .....	60
<b>8. Problemas</b> .....	61

<b>Capítulo 4. Elasticidad y termoelasticidad lineal . . . . .</b>	<b>67</b>
1. El concepto de elasticidad . . . . .	68
2. El principio de superposición . . . . .	68
3. Las constantes elásticas de un material isótropo . . . . .	69
3.1. El módulo de Young . . . . .	70
3.2. El coeficiente de Poisson . . . . .	70
4. La ley de Hooke generalizada . . . . .	71
5. Las ecuaciones de Lamé . . . . .	73
6. Deformaciones y tensiones proporcionales . . . . .	74
7. Termoelasticidad lineal . . . . .	75
8. Problemas . . . . .	78
<b>Capítulo 5. Estudio del problema elástico completo . . . . .</b>	<b>81</b>
1. Enunciado completo del problema . . . . .	82
2. El principio de los trabajos virtuales . . . . .	83
3. Las ecuaciones de Navier . . . . .	84
4. El principio de Saint Venant . . . . .	85
5. Estados planos de tensión y deformación . . . . .	85
5.1. Estados de tensión plana . . . . .	86
5.2. Estados de deformación plana . . . . .	86
5.3. El diagrama de Mohr en estados planos . . . . .	87
6. Problemas . . . . .	90
<b>Capítulo 6. La energía elástica . . . . .</b>	<b>93</b>
1. El trabajo de las fuerzas exteriores sobre un cuerpo deformable . . . . .	93
2. La energía elástica de deformación . . . . .	95

3. El teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti.....	97
4. Introducción a los modelos estructurales.....	98
5. Los coeficientes de influencia.....	98
6. Los teoremas de Castigliano.....	101
7. Problemas.....	103
<b>Capítulo 7. Estudio de la finalización del comportamiento elástico.....</b>	<b>109</b>
1. Criterios de fallo.....	110
2. Criterios de fluencia para materiales dúctiles.....	111
2.1. El criterio de Tresca.....	112
2.2. El criterio de von Mises.....	112
3. Criterios de rotura para materiales frágiles.....	113
3.1. El criterio de Rankine.....	113
3.2. El criterio de Mohr-Coulomb.....	114
3.3. El criterio de Drucker-Prager.....	115
4. Problemas.....	116
<b>Bibliografía.....</b>	<b>119</b>

# Capítulo 1

## Álgebra y cálculo tensorial

---

Cada disciplina de la ciencia y la ingeniería tiene su lenguaje, que ha ido evolucionando con los años y que permite su descripción de la forma más clara y sencilla posible. La elasticidad es una teoría de campos y, como tal, se expresa más clara y sencillamente en el lenguaje de los vectores y los tensores. Se podría decir que el lenguaje natural de la teoría de la elasticidad, aquel en el que los conceptos aparecen más claramente representados, es el de los vectores y los tensores, y por ello parece recomendable su uso. En estas páginas se recogen los conceptos más básicos, que son los que se emplearán en el desarrollo de la asignatura. Un desarrollo más completo de los conceptos del álgebra y cálculo tensorial se pueden encontrar, entre muchos otros, en [4, 5, 6, 8].

# 1. Vectores y campos vectoriales

La definición completa de un vector y un campo vectorial se puede consultar en cualquier libro de álgebra. En lo que sigue, llamaremos **vector** simplemente a un elemento cualquiera de  $\mathbb{R}^d$ , siendo  $d$  igual a 3 en estas notas, aunque la gran parte de los conceptos que se presentan son válidos también para otras dimensiones. Un **campo vectorial** definido en  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  es una función que para todo punto en  $\Omega$  devuelve un vector.

**Notación:** Para diferenciar los vectores de los escalares se emplean en la literatura distintas notaciones. Así, dependiendo del libro u autor que se consulte, un mismo vector se puede ver escrito como  $\mathbf{u}, \bar{u}, \vec{u}, \underline{u}, \dots$ . Entre todas estas utilizaremos la primera.

## 1.1. Componentes y cambio de base

Sea  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  una **base** cartesiana de  $\mathbb{R}^3$ . Cualquier vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  se puede expresar de la forma

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i\mathbf{e}_i, \quad (1.1)$$

y  $v_1, v_2, v_3$  se llaman las **componentes** de  $\mathbf{v}$  en la base  $\mathcal{B}$ . Las componentes de un vector cambian según la base a la cuál se refieran, por lo tanto no se debe confundir el vector mismo con su representación.

Para expresar que una terna  $v_1, v_2, v_3$  son las componentes del vector  $\mathbf{v}$  en la base  $\mathcal{B}$  escribiremos:

$$\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}}. \quad (1.2)$$

A menudo, cuando no hay posibilidad de confusión porque sólo se ha definido una base se emplea la notación

$$\{\mathbf{v}\} = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right\}, \quad \text{o simplemente} \quad \mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right\}. \quad (1.3)$$



La relación entre las componentes de un vector, referidas a dos bases distintas se obtiene de la siguiente manera. Sea  $\mathcal{B}$  la base anteriormente definida y  $\mathcal{B}'$  una nueva base cartesiana formada por los vectores ortormales  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ . Un vector  $\mathbf{e}_i$  cualquiera de la base  $\mathcal{B}$  se puede expresar como suma de vectores de la base  $\mathcal{B}'$  de la forma:

$$\mathbf{e}_i = a_{i1}\mathbf{e}'_1 + a_{i2}\mathbf{e}'_2 + a_{i3}\mathbf{e}'_3, \quad \text{siendo} \quad a_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j. \quad (1.4)$$

Otro vector cualquiera  $\mathbf{v}$  se puede escribir indistintamente como combinación lineal de los elementos de  $\mathcal{B}$  o de los de  $\mathcal{B}'$ :

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^3 v'_j \mathbf{e}'_j.$$

Sustituyendo la expresión (1.4) e identificando las componentes se obtiene

$$v'_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} v_i. \quad (1.5)$$

Esta última relación se puede expresar matricialmente como

$$\begin{Bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad (1.6)$$

o de forma compacta

$$\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}'} = [A]^T \{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}}. \quad (1.7)$$

Si las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  son ortonormales, la matriz de cambio de base  $[A]$ , es una matriz ortogonal, es decir, que verifica  $[A]^{-1} = [A]^T$ . Más aún, si las dos bases tienen la misma orientación ( $[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3] = [\mathbf{e}'_1 \ \mathbf{e}'_2 \ \mathbf{e}'_3]$ , ver debajo el significado de la operación  $[\ ]$ ), entonces el determinante de  $[A]$  es igual a 1 por tanto es una rotación.

Es habitual referirse a los vectores de la base cartesiana de  $\mathbb{R}^3$  como  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  y las componentes de un vector  $\mathbf{v}$  en dicha base como  $v_x, v_y, v_z$ .

## 1.2. Operaciones algebraicas

Los vectores de  $\mathbb{R}^d$  poseen las operaciones vectoriales básicas de suma y multiplicación por un escalar. Para realizar operaciones vectoriales nos vemos

obligados a menudo a emplear las componentes de un vector, pero es importante recalcar que el resultado es independiente de la base escogida, siempre que todos los vectores que intervengan se expresen en la misma base. Por ejemplo, para calcular el vector  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ , utilizamos las componentes de todos ellos en la base  $\mathcal{B}$  y podemos emplear la expresión:

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} . \quad (1.8)$$

Además, en el espacio euclídeo se define el **producto escalar** de dos vectores con la expresión

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 . \quad (1.9)$$

El producto escalar, como el resto de operaciones de las que tratamos, es una operación *intrínseca* que no depende de la base escogida. La **norma** de un vector se indicará como  $|\mathbf{a}|$  y se define de la siguiente forma

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} . \quad (1.10)$$

Cualquier vector no nulo se puede normalizar, multiplicándose por el inverso de su norma, y obteniéndose un **vector unitario**. Dado un vector cualquiera  $\mathbf{a}$  y otro vector cualquiera unitario  $\mathbf{u}$ , se definen la proyección de  $\mathbf{a}$  sobre  $\mathbf{u}$  y la proyección de  $\mathbf{a}$  sobre el plano normal a  $\mathbf{u}$  como

$$\mathbf{a}_{\mathbf{u}}^{\parallel} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} , \quad \mathbf{a}_{\mathbf{u}}^{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\mathbf{u}}^{\parallel} . \quad (1.11)$$

Esta descomposición es única y se puede escribir  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\mathbf{u}}^{\parallel} + \mathbf{a}_{\mathbf{u}}^{\perp}$ .

El **producto vectorial** de dos vectores se indica como  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  y se define el **producto mixto**  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  como

$$[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} . \quad (1.12)$$

### 1.3. Cálculo vectorial

En Teoría de Campos se estudian los principales operadores diferenciales que actúan sobre los campos escalares y vectoriales. Estos son el gradiente, la divergencia y el rotacional. Para definirlos, consideramos en esta sección una base cartesiana

$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  y coordenadas  $x, y, z$ . Además usamos la notación

$$\phi_{,x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \phi_{,y} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \phi_{,z} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (1.13)$$

para cualquier campo  $\phi = \phi(x, y, z)$ .

Sean  $\phi$  y  $\mathbf{v}$  respectivamente un campo escalar y uno vectorial definidos sobre  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  y diferenciables. Las operaciones diferenciales mencionadas se definen, en componentes:

$$\begin{aligned} \{\text{grad } \phi(x, y, z)\} &= \begin{Bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \\ \phi_{,z} \end{Bmatrix}, \\ \text{div } \mathbf{v}(x, y, z) &= v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z}, \\ \text{rot } \mathbf{v}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Existen numerosas relaciones entre los operadores diferenciales y teoremas integrales que los emplean. En este curso utilizaremos dos únicamente: el teorema de la divergencia y la fórmula de la integral por partes.

**Teorema 1.1: Teorema de Gauss o de la divergencia** Sea  $\Omega$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  y  $\Gamma$  su contorno. Si  $\mathbf{v}$  es un campo vectorial definido en  $\Omega$  se verifica:

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma, \quad (1.15)$$

siendo  $\mathbf{n}$  la normal saliente a  $\Gamma$ .

Para el mismo dominio, si  $\phi$  es un campo escalar, entonces

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v} \, \phi \, d\Omega = \int_{\Gamma} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \text{grad } \phi \, d\Omega. \quad (1.16)$$

## 2. Tensores y campos tensoriales

Los tensores son objetos del álgebra tan útiles como los vectores, y su uso en varias ramas de la mecánica es muy habitual. Aunque existen tensores de cualquier orden (entero), en esta asignatura emplearemos el término “tensor” para

referirnos a los de segundo orden, los más habituales en mecánica. Por ejemplo, el tensor de inercia que se emplea en Mecánica Clásica es un tensor de segundo orden.

Los tensores se estudian a menudo en álgebra bajo el nombre de “homomorfismos” y son simplemente aplicaciones lineales de  $\mathbb{R}^d$  en  $\mathbb{R}^d$ , es decir, funciones lineales que transforman un vector en otro. Para cualquier vector  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ , un tensor  $\mathbf{T}$  es una operación lineal tal que  $\mathbf{T}(\mathbf{a})$  es otro vector. Por sencillez, los paréntesis se eliminan y se escribe simplemente  $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$ .

Un campo tensorial no es más que una función que para cada punto de un dominio devuelve un tensor. Volviendo al ejemplo de la Mecánica Clásica, el tensor de inercia es un campo tensorial que depende del punto donde se calcule. Además transforma vectores en vectores. Si el punto de evaluación es el centro de gravedad o un punto fijo, este tensor transforma la velocidad angular en el momento cinético respecto al punto.

**Notación:** Igual que en el caso de los vectores, existe una notación especial que permite distinguir los tensores de segundo orden del resto de objetos (escalares, vectores, ...). También esta notación depende del autor o del libro que se consulte y un mismo tensor se puede escribir como  $\mathbf{A}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}$ ,  $\vec{\mathbf{A}}$ ,  $\underline{\mathbf{A}}$ , ... En estas notas se empleará la primera de ellas y se evitará la confusión entre vectores y tensores de segundo orden empleando siempre que no se indique lo contrario letras minúsculas en el primer caso y mayúsculas en el segundo.

## 2.1. Componentes y cambio de base

Recordamos que un tensor es simplemente una operación que transforma vectores en vectores, y que es lineal. Pues bien, en particular se pueden usar tensores y operarlos sobre los vectores de una base  $\mathcal{B}$ . Con ello se pueden definir las **componentes** de un tensor  $\mathbf{T}$  como los nueve escalares

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}\mathbf{e}_j), \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.17)$$

Las componentes de un tensor referidas a una base  $\mathcal{B}$  se muestran en forma de matriz, y se escribe

$$[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad (1.18)$$

de forma análoga a la expresión en un vector columna de un vector (1.2). Como en el caso de los vectores, la matriz de un tensor en una base cualquiera no debe de confundirse con el tensor propiamente dicho.

La propiedad de linealidad de los tensores implica que las componentes del vector  $\mathbf{b}$  que resulta de la aplicación de un tensor  $\mathbf{T}$  sobre un vector  $\mathbf{a}$  se pueden obtener multiplicando la matriz  $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}$  y el vector columna  $\{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}}$ . Es decir, si  $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$ , entonces

$$\{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}} = [\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}\{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}}, \quad \text{o más explícitamente} \quad \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}. \quad (1.19)$$

Observando la definición de las componentes de un tensor deducimos que éstas dependen de la base en la que se exprese el tensor. Para hallar la relación entre componentes de un mismo tensor en dos bases cartesianas distintas  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  escribimos la relación  $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$  en componentes de las dos bases.

$$\{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}} = [\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}\{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}}, \quad \text{y} \quad \{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}'} = [\mathbf{T}]_{\mathcal{B}'}\{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}'}. \quad (1.20)$$

La expresión (1.7) relaciona las componentes de los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  en las dos bases así que la segunda ecuación de (1.20) se puede escribir como

$$[\mathbf{A}]^T\{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}} = [\mathbf{T}]_{\mathcal{B}'}[\mathbf{A}]^T\{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}}. \quad (1.21)$$

Despejando  $\{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}}$  y comparando el resultado con la primera ecuación de (1.20) se deduce que la expresión que relaciona las componentes de  $\mathbf{T}$  en las dos bases consideradas es

$$[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{A}][\mathbf{T}]_{\mathcal{B}'}[\mathbf{A}]^T. \quad (1.22)$$

## 2.2. Operaciones algebraicas

Los tensores poseen las operaciones de suma, multiplicación y multiplicación por un escalar. La expresión matricial del resultado de todas estas operaciones es la correspondiente operación matricial operada sobre las matrices de componentes de los tensores. Insistimos, como en el caso de los vectores, que el resultado es independiente de la base escogida.

La **traza** de un tensor es la suma de los elementos de la diagonal de su matriz de componentes:

$$\text{tr}[\mathbf{T}] = T_{11} + T_{22} + T_{33}. \quad (1.23)$$

La traza de un tensor no depende tampoco de la base en la que se exprese su matriz de componentes y se dice que es por tanto un invariante del tensor. Esto se puede comprobar calculando la traza del tensor en la ecuación (1.22). La operación traza es lineal así que, dado un escalar  $\alpha$  y dos tensores  $\mathbf{T}, \mathbf{S}$ ,

$$\text{tr}[\alpha\mathbf{T}] = \alpha\text{tr}[\mathbf{T}] , \quad \text{tr}[\mathbf{T} + \mathbf{S}] = \text{tr}[\mathbf{T}] + \text{tr}[\mathbf{S}] . \quad (1.24)$$

El **producto escalar** entre tensores de orden dos se escribe con el símbolo “:” y se define como la operación que a toda pareja de tensores  $\mathbf{T}, \mathbf{S}$  asocia el escalar  $\mathbf{T} : \mathbf{S}$  definido por

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} = \text{tr}[\mathbf{S}^T \mathbf{T}] . \quad (1.25)$$

En componentes, la operación de la doble contracción, como también se conoce a este producto escalar, es simplemente

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} S_{ij} . \quad (1.26)$$

Como esta operación define un producto escalar, también se puede definir una **norma** asociada de tensores:

$$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{\mathbf{T} : \mathbf{T}} . \quad (1.27)$$

El **determinante** de un tensor  $\mathbf{T}$  es el escalar  $\det(\mathbf{T})$  que verifica

$$[\mathbf{T}\mathbf{a} \ \mathbf{T}\mathbf{b} \ \mathbf{T}\mathbf{c}] = \det(\mathbf{T})[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] . \quad (1.28)$$

Además, se puede demostrar, que el determinante se puede obtener calculando el determinante de la matriz de componentes del tensor, en cualquier base. El determinante es, por tanto, otro invariante del tensor.

### 2.3. Tensores con propiedades especiales

Dependiendo de sus propiedades, los tensores se clasifican empleando unos calificativos idénticos a los de la clasificación de las matrices. En primer lugar, el **tensor identidad**  $\mathbf{I}$  es el único que verifica  $\mathbf{I}\mathbf{a} = \mathbf{a}$  para todo vector  $\mathbf{a}$ . La matriz de componentes de  $\mathbf{I}$ , en cualquier base, es la matriz identidad. El **tensor nulo** es el único tensor tal que  $\mathbf{T} + \mathbf{0} = \mathbf{T}$ , para cualquier tensor  $\mathbf{T}$ .

Dado un tensor cualquiera  $\mathbf{T}$  definimos el tensor **traspuesto**  $\mathbf{T}^T$  como aquel que verifica

$$(\mathbf{T}^T \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{T} \mathbf{b}) , \quad (1.29)$$

para cualquier pareja de vectores  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ . Usando esta definición se dice que un tensor es simétrico si es igual a su traspuesto, y antisimétrico (o hemisimétrico) si es el opuesto de su traspuesto. Se comprueba inmediatamente que la matriz asociada a un tensor simétrico es simétrica, en cualquier base, y la matriz asociada a un tensor antisimétrico es a su vez antisimétrica, también en cualquier base.

Los tensores antisimétricos tienen una propiedad que emplearemos más adelante y es que el efecto de aplicar un tensor antisimétrico  $\mathbf{W}$  sobre un vector cualquiera  $\mathbf{a}$  es el mismo que el de multiplicar vectorialmente un vector  $\mathbf{w}$ , llamado el vector axial de  $\mathbf{W}$ , sobre  $\mathbf{a}$ . Es decir, que para todo  $\mathbf{a}$ ,

$$\mathbf{W} \mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a} . \quad (1.30)$$

Además esta relación es recíproca, y por ello multiplicar vectorialmente un vector  $\mathbf{w}$  por otro vector cualquiera  $\mathbf{a}$  es equivalente a multiplicar un tensor antisimétrico  $\mathbf{W}$ , que es único, y que se llama el tensor antisimétrico asociado al vector  $\mathbf{w}$ .

Un tensor es *desviador* si tiene traza nula y un tensor es esférico si es de la forma  $\mathbf{T} = p\mathbf{I}$ , siendo  $p$  un escalar.

## 2.4. Descomposiciones de tensores

Todo tensor  $\mathbf{T}$  se puede descomponer de forma unívoca en una parte simétrica  $\mathbf{T}^s$  y otra antisimétrica  $\mathbf{T}^a$  de forma que  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^s + \mathbf{T}^a$ . Se comprueba fácilmente que cada una de estas partes son:

$$\mathbf{T}^s = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) , \quad \mathbf{T}^a = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T) . \quad (1.31)$$

Además, todo tensor  $\mathbf{T}$  se puede descomponer de forma unívoca en una parte esférica y otra desviadora. La parte esférica, que denominaremos  $\mathbf{T}^{vol}$  tiene la misma traza que  $\mathbf{T}$  y la parte desviadora  $\mathbf{T}^{des}$ , no tiene traza. Ambas se calculan así:

$$\mathbf{T}^{vol} = \frac{\text{tr}[\mathbf{T}]}{3} \mathbf{I} , \quad \mathbf{T}^{des} = \mathbf{T} - \mathbf{T}^{vol} . \quad (1.32)$$

## 2.5. Autovectores y autovalores

Dado un tensor  $\mathbf{T}$  cualquiera, se dice que el vector  $\mathbf{v}$  es un autovector y  $\lambda$  su autovalor asociado si  $\mathbf{v}$  es unitario y

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} . \quad (1.33)$$

Para calcular los autovalores buscamos las soluciones no triviales de la ecuación (1.33) y para ello hay que resolver la ecuación

$$\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = 0 . \quad (1.34)$$

Esta ecuación es un polinomio de tercer grado que tiene por expresión

$$-\lambda^3 + I_1(\mathbf{T})\lambda^2 - I_2(\mathbf{T})\lambda + I_3(\mathbf{T}) = 0 . \quad (1.35)$$

Las funciones  $I_1, I_2, I_3$  son los llamados invariantes principales del tensor  $\mathbf{T}$ , porque no dependen de la base, y su expresión explícita es

$$I_1(\mathbf{T}) = \text{tr}[\mathbf{T}] , \quad I_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}(\text{tr}[\mathbf{T}]^2 - \text{tr}[\mathbf{T}^2]) , \quad I_3(\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}) . \quad (1.36)$$

Como en álgebra de matrices, una vez calculados los tres autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$ , se calculan sus autovectores asociados buscando las bases de los espacios nulos de los tensores

$$\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} , \quad (1.37)$$

que no son vacíos por definición. Cuando el tensor es simétrico, el siguiente teorema espectral garantiza que los autovalores y autovectores cumplen una propiedades especiales que se emplearán muy a menudo en la mecánica de sólidos deformables. Por su importancia incluimos una demostración del teorema.

**Teorema 2.2:** *Los tres autovalores de un tensor simétrico  $\mathbf{S}$  son reales y sus tres autovectores asociados forman una base ortonormal, llamada la **base principal** del tensor, que denominamos  $\mathcal{B}^*$ . En esta base, la expresión matricial del tensor es:*

$$[\mathbf{S}]_{\mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}^*} . \quad (1.38)$$



DEMOSTRACIÓN: Demostramos primero que los tres autovalores son reales. Como el polinomio característico de  $\mathbf{S}$  es de tercer orden existen tres autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  que en principio pueden ser complejos. Si  $\mathbf{v}$  es el autovector asociado a un autovalor  $\lambda$  de los tres y  $\bar{\mathbf{v}}$  es el autovector conjugado entonces

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{S}\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \cdot \lambda\mathbf{v} = \lambda|\mathbf{v}|^2 . \quad (1.39)$$

Conjugando ambos lados de la ecuación anterior, se obtiene

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}|\mathbf{v}|^2 . \quad (1.40)$$

Igualando las identidades de (1.39) y (1.40) concluimos que  $\lambda = \bar{\lambda}$ , es decir que  $\lambda$  es real.

La demostración de la segunda parte es inmediata si los autovalores son distintos, pero consideramos el caso más general. Como antes, sean  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  los tres autovalores de  $\mathbf{S}$  (ordenados de cualquier manera) y  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  sus autovectores correspondientes. Si  $\mathbf{w}$  es un vector ortogonal a  $\mathbf{v}_1$ , entonces  $\mathbf{S}\mathbf{w}$  es también ortogonal a  $\mathbf{v}_1$ , porque  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{S}\mathbf{w} = \mathbf{S}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} = 0$ . Así pues  $\mathbf{S}$ , cuando se restringe al subespacio de vectores ortogonales a  $\mathbf{v}_1$  es también un tensor de ese conjunto a sí mismo. Por lo tanto tendrá dos autovalores y autovectores, que forzosamente deberán ser ortogonales a  $\mathbf{v}_1$ . Tomando uno cualquiera que llamamos  $\lambda_2$  y  $\mathbf{v}_2$  al autovector, repetimos el mismo argumento para el subespacio de vectores ortogonales a  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  para concluir que los tres autovectores son ortonormales.

En la base principal tenemos

$$\{\mathbf{v}_1\}_{\mathcal{B}^*} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}^*}, \quad \{\mathbf{v}_2\}_{\mathcal{B}^*} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}^*}, \quad \{\mathbf{v}_3\}_{\mathcal{B}^*} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}^*}, \quad (1.41)$$

por lo que la expresión matricial de  $\mathbf{S}$  ha de ser como se indica en (1.38).  $\blacksquare$

Un tensor simétrico con dos autovalores iguales se llama **cilíndrico**, y cuando los tres son iguales, **esférico**. En este último caso el tensor ha de ser proporcional al tensor identidad.

## 2.6. Cálculo tensorial

Como en el caso del cálculo vectorial resumimos únicamente los elementos más básicos del cálculo tensorial, aquellos que emplearemos en la asignatura. En primer lugar hay que indicar que existen expresiones para el gradiente y la divergencia

de tensores de cualquier orden (no sólo de segundo orden). Puesto que no son necesarios no los definiremos aquí. Tan sólo serán necesarios el gradiente de un campo vectorial, que es un campo tensorial, y la divergencia de un campo tensorial, que es un campo vectorial.

Para definir el **gradiente de un campo vectorial** de forma intrínseca (sin coordenadas) se usa la misma idea que el caso de un campo escalar. En esta situación se define el gradiente de un campo escalar  $\phi$  como aquel único vector  $\text{grad } \phi$  que verifica que, para cualquier pareja de puntos  $P_o$  y  $P$

$$\phi(P) = \phi(P_o) + \text{grad } \phi(P_o) \cdot \mathbf{r} + \mathcal{O}(|\mathbf{r}|^2), \quad (1.42)$$

siendo  $\mathbf{r}$  el vector que va del punto  $P_o$  al punto  $P$ . En el caso de un campo vectorial  $\mathbf{v}$  su gradiente es el único tensor  $\text{grad } \mathbf{v}$  tal que

$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(P_o) + (\text{grad } \mathbf{v}(P_o))\mathbf{r} + \mathcal{O}(|\mathbf{r}|^2). \quad (1.43)$$

En una base cartesiana las componentes del tensor  $\text{grad } \mathbf{v}$  son

$$[\text{grad } \mathbf{v}(x, y, z)] = \begin{bmatrix} v_{x,x} & v_{x,y} & v_{x,z} \\ v_{y,x} & v_{y,y} & v_{y,z} \\ v_{z,x} & v_{z,y} & v_{z,z} \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

El operador **divergencia** de un campo tensorial  $\mathbf{T}$  se define de forma intrínseca como aquel único campo vectorial  $\text{div } \mathbf{T}$  que verifica

$$(\text{div } \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} = \text{div } (\mathbf{T}^T \mathbf{a}), \quad (1.45)$$

para todo vector  $\mathbf{a}$ . En coordenadas cartesianas, las componentes del vector  $\text{div } \mathbf{T}$  son

$$\{\text{div } \mathbf{T}(x, y, z)\} = \begin{Bmatrix} T_{xx,x} + T_{xy,y} + T_{xz,z} \\ T_{yx,x} + T_{yy,y} + T_{yz,z} \\ T_{zx,x} + T_{zy,y} + T_{zz,z} \end{Bmatrix}. \quad (1.46)$$

El **teorema de la divergencia** para campos tensoriales es prácticamente idéntico a (1.15), pues establece que para toda región  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  de contorno  $\Gamma$  y un campo tensorial  $\mathbf{T}$  definido en ella, la integral de la divergencia de  $\mathbf{T}$  es igual al flujo saliente de  $\mathbf{T}$ :

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{T} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma, \quad (1.47)$$

siendo  $\mathbf{n}$  la normal saliente a  $\Gamma$ . Para el mismo dominio, si  $\mathbf{v}$  es un campo vectorial, entonces la fórmula de la **integración por partes** es

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{T} : \operatorname{grad} \mathbf{v} \, d\Omega . \quad (1.48)$$

### 3. Problemas

- 1) Demuestra que, para cualquier tensor  $\mathbf{T}$ , su traza verifica  $\operatorname{tr}[\mathbf{T}] = \mathbf{I} : \mathbf{T}$ . Calcula la traza del tensor identidad.
- 2) Demuestra el resultado (1.16) utilizando el teorema de la divergencia sobre el campo vectorial  $\phi\mathbf{v}$ .
- 3) Comprueba que el tensor antisimétrico asociado a un vector de componentes  $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}^T$  es el que tiene por matriz de componentes

$$[\mathbf{V}] = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix} .$$

- 4) Si  $\mathbf{S}$  es un tensor simétrico y  $\mathbf{W}$  antisimétrico, comprueba que  $\mathbf{S} : \mathbf{W} = 0$ . si  $\mathbf{V}$  es un tensor esférico y  $\mathbf{E}$  uno desviador, comprueba también que  $\mathbf{V} : \mathbf{E} = 0$ .
- 5) Demuestra que el producto escalar de vectores no depende de la base escogida.
- 6) Si  $\mathbf{u}$  es un campo vectorial, demuestra que el vector axial de la parte antisimétrica del tensor  $\operatorname{grad}(\mathbf{u})$  coincide con  $\frac{1}{2}\operatorname{rot}(\mathbf{u})$ .
- 7) El tensor  $\mathbf{T}$  en la base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  tiene la siguiente expresión matricial

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} .$$

Encontrar la expresión matricial de  $\mathbf{T}$  en la base  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  si  $\mathbf{e}'_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}'_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$ . Comprobar que la traza y el determinante no dependen de la representación matricial.



# Capítulo 2

## Estudio del equilibrio

---

### 1. El modelo del sólido deformable

La materia no es continua. Si empleamos un microscopio de suficiente resolución podremos apreciar cómo ésta se compone de multitud de átomos separados entre sí, los cuales a su vez están formados por un núcleo diminuto y nubes de electrones lejanos a estos. Esta observación es válida *para cualquier* tipo de cuerpo: sólido, líquido o gaseoso.

En cualquier rama de la ciencia, e ingeniería en particular, se formulan modelos matemáticos de la realidad para poder explicar su comportamiento y poder predecir su comportamiento futuro. *Todos* los modelos son inexactos, pues asumen simplificaciones de la materia para que las ecuaciones resultantes puedan ser manejables y se puedan resolver al menos en algunos casos. Hay en cualquier

caso una cierta jerarquía de modelos de la realidad física, desde los más sencillos e inexactos, hasta los más complejos y precisos.

En mecánica de sólidos, que es la disciplina que nos concierne, existe el modelo de “partícula” que Galileo y Newton, entre otros, introdujeron. Según este modelo, la dinámica de sólidos puede estudiarse considerando que estos son puntos dotados de masa. Un modelo de complejidad mayor es el de “sólido rígido”, que incorpora detalles sobre la distribución de la masa y la orientación de los cuerpos.

Los dos modelos indicados no describen ni la deformabilidad de los cuerpos, ni la posibilidad de rotura/fallo, ni las diferencias entre distintos materiales, ni los efectos de la temperatura sobre los cuerpos... Para incorporar todos estos aspectos se formula un modelo más complejo, llamado el modelo de “sólido deformable”, que sigue siendo imperfecto e inexacto, pero cuya precisión a la hora de reproducir lo que ocurre con los sólidos reales es mucho mayor que la de la partícula o el sólido rígido.

En este curso describiremos el modelo de “sólido deformable” para formados por materiales:

- *continuos*, por lo tanto ignorando la estructura atómica de la materia;
- *homogéneos*, es decir indistinguibles punto a punto;
- *elásticos*, o sea cuya deformación desaparece de forma instantánea cuando las cargas se retiran;
- *isótropos*, que indica que las propiedades son las mismas en todas las direcciones del espacio.

Aún con estas limitaciones, el modelo matemático resultante es muy complejo, así que incorporamos una restricción más, que no tiene que ver con el material sino con el tipo de problema que vamos a estudiar y es que sólo consideramos problemas en los que las deformaciones y sus gradientes son muy pequeñas.

Con estas restricciones, estudiaremos el comportamiento de sólidos, entendidos como subconjuntos  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , con contorno  $\Gamma$  formados por un conjunto continuo de puntos que debido a la acción de fuerzas exteriores y/o temperatura pueden adoptar formas distintas a la original.

## 2. Fuerzas que actúan sobre los sólidos deformables

Como la mecánica trata de las fuerzas y su efecto sobre los cuerpos, el primer paso para describir en qué consiste el sólido deformable consiste en delimitar qué fuerzas vamos a considerar y cuáles no.

En el caso de la partícula, las únicas fuerzas que se admiten son las fuerzas puntuales. En el modelo del sólido rígido, además de las primeras, se admiten pares de fuerzas. En el modelo de sólido deformable *no se admite ninguna de las dos anteriores* y sin embargo se permiten dos nuevos tipos de fuerzas llamadas *fuerzas volumétricas* y *fuerzas de superficie*.

## 2.1. Fuerzas volumétricas

Las fuerzas volumétricas son fuerzas que actúan sobre cada diferencial de volumen del cuerpo, o equivalentemente, sobre cada diferencial de masa. El ejemplo clásico es el de la fuerza de la gravedad, que actúa sobre cada elemento diferencial de volumen “tirando” de él hacia abajo. Matemáticamente, las fuerzas volumétricas se describen con un campo vectorial  $\mathbf{f}_v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  de forma que sobre el diferencial de volumen en el punto  $P \in \Omega$  actúa una fuerza diferencial  $\mathbf{f}_v dv$ . La resultante, por tanto, de todas las fuerzas volumétricas que actúan sobre un cuerpo es

$$\mathbf{R}_v = \int_{\Omega} \mathbf{f}_v(P) dv , \quad (2.1)$$

o en componentes en una base cartesiana  $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{z}\}$ ,

$$\begin{Bmatrix} R_{vx} \\ R_{vy} \\ R_{vz} \end{Bmatrix} = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{vx}(P) \\ \mathbf{f}_{vy}(P) \\ \mathbf{f}_{vz}(P) \end{Bmatrix} dv . \quad (2.2)$$

## 2.2. Fuerzas de superficie o de contacto

Las fuerzas de superficie, también llamadas fuerzas de contacto, son fuerzas aplicadas sobre el cuerpo a través de su contorno  $\Gamma$ . Matemáticamente se expresan como un campo vectorial  $\mathbf{f}_s : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido sobre el contorno de fuerzas por unidad de superficie. Sobre un diferencial de área sobre el punto  $P \in \Gamma$  actúa una fuerza total de valor  $\mathbf{f}_s dA$  y, por tanto, la resultante de todas las fuerzas de superficie actuando sobre un cuerpo es:

$$\mathbf{R}_s = \int_{\Gamma} \mathbf{f}_s(P) dA , \quad (2.3)$$

o en componentes en una base cartesiana

$$\begin{pmatrix} R_{sx} \\ R_{sy} \\ R_{sz} \end{pmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{sx}(P) \\ \mathbf{f}_{sy}(P) \\ \mathbf{f}_{sz}(P) \end{pmatrix} dA . \quad (2.4)$$

En mecánica, se denomina *tensión* a la fuerza aplicada sobre la unidad de área. A diferencia de la *presión*, la tensión tiene dirección y sentido.

### Observaciones 2.1:

- i. Los sólidos deformables *no* admiten fuerzas ni pares puntuales.
- ii. Las fuerzas volumétricas tienen dimensiones de  $F/L^3$  y las de superficie, de  $F/L^2$ .
- iii. Las fuerzas de superficie se pueden descomponer en su componente normal y tangencial a la superficie del cuerpo. Si consideramos un punto  $P \in \Gamma$ , y la normal a  $\Gamma$   $\mathbf{n}$  en dicho punto, podemos calcular

$$\mathbf{f}_s^{\parallel} = (\mathbf{f}_s \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} , \quad \mathbf{f}_s^{\perp} = \mathbf{f}_s - \mathbf{f}_s^{\parallel} . \quad (2.5)$$

□

Es común estudiar sólidos deformables sujetos en una parte de su contorno que denominaremos  $\Gamma_u$ , de forma que  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$  con  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ . En el contorno  $\Gamma_u$  es sólido deformable tiene sus desplazamientos impedidos y para ello la sustentación ejerce unas fuerzas de superficie de valor desconocido a priori que se encargan de satisfacer dicha restricción. Por el contrario, o bien  $\Gamma_t$  es una superficie libre o bien hay fuerzas de superficie conocidas, de tal manera que los desplazamientos de sus puntos son desconocidos cuando se plantea el problema (ver Figura 2.1).

La resultante de las fuerzas de superficie sobre  $\Gamma_u$  se llama la **reacción** sobre el cuerpo y no se conoce hasta que se resuelve todo el problema de contorno.

## 3. Fuerzas internas en un cuerpo deformable

El concepto de fuerza interna es central para el estudio de cuerpos deformables y es nuevo, en el sentido de que no existe en los modelos de partículas con masa o en el de cuerpos rígidos.

Cuando se estudia un cuerpo deformable sometido a fuerzas externas se deduce que, aunque no se puedan medir, deben de existir fuerzas en el interior del mismo. Estas no se pueden medir porque para ello habría que partir el cuerpo, creando una



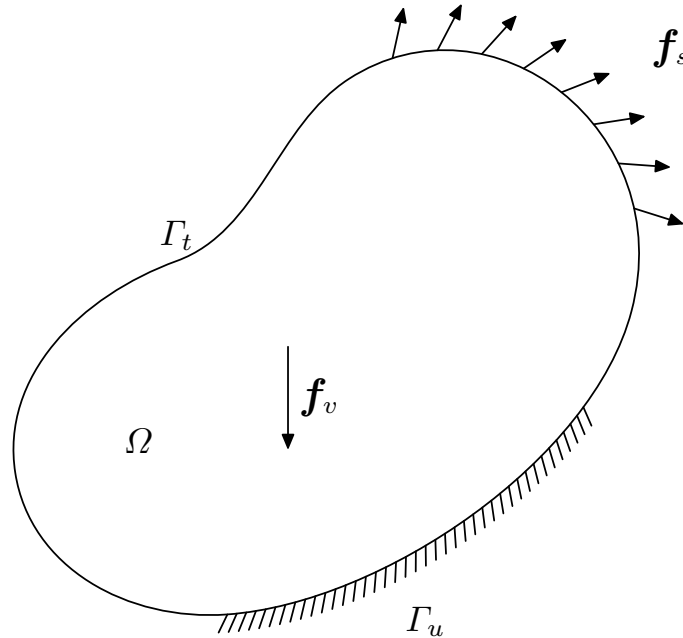


Figura 2.1: El modelo de cuerpo deformable

nueva superficie externa y por tanto dejarían de ser fuerzas internas. Pero, sin duda deben de existir para mantener la cohesión entre sus partículas y para transmitir las fuerzas aplicadas desde el exterior, en la superficie o en el interior.

Para comprender este nuevo concepto, consideramos un cuerpo formado por una parte roja y otra verde unidas por una superficie “suave”  $\mathcal{S}$ . Cuando sometemos a todo el cuerpo a fuerzas externas (volumétricas o de superficie) también aparecen fuerzas entre las dos partes diferenciadas por sus colores. Si quitásemos la parte verde, para que la parte roja no lo notara deberíamos aplicar sobre la superficie  $\mathcal{S}$  algunas fuerzas que “sustituyeran” el efecto de la parte roja sobre la primera, y viceversa. Estas fuerzas no se controlan desde el exterior, no son fuerzas aplicadas, sino que aparecen en todos los cuerpos deformables, por su propia naturaleza. Lo que es importante comprender es que la única acción que la parte verde realiza sobre la roja es la de unas fuerzas de superficie aplicadas sobre  $\mathcal{S}$ , y que ésto es cierto para cualquier cuerpo deformable y cualquier superficie interior que queramos

considerar<sup>1</sup>. Las fuerzas que se transmiten en esta superficie, por unidad de área, reciben el nombre de *tensiones internas*, y dependen, en general, del punto del sólido que se investigue y del corte imaginario que se considere. El concepto de tensión interna y externa están muy relacionados y resumimos su definición:

**Definición 3.2:** *El vector tensión  $\mathbf{t}$  en un punto  $P$  del sólido  $\Omega$ , cuando éste se corta imaginariamente con una superficie  $\mathcal{S}$ , es el vector de fuerzas por unidad de superficie que el resto del cuerpo realiza sobre este punto y superficie.*

Como el vector tensión está siempre definido sobre una superficie de normal  $\mathbf{n}$ , se definen su proyección sobre la normal  $\mathbf{t}_n$  y sobre la superficie misma  $\mathbf{t}^\perp$  de la manera estándar:

$$\mathbf{t}_n^\parallel = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} , \quad \mathbf{t}_n^\perp = \mathbf{t} - \mathbf{t}_n . \quad (2.6)$$

Se definen las *componentes intrínsecas de la tensión* definida sobre una superficie de normal  $\mathbf{n}$  como

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} , \quad |\tau| = |\mathbf{t}_n^\perp| = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - \sigma_n^2} . \quad (2.7)$$

Nótese que la componente normal  $\sigma_n$  tiene signo, pero que la componente tangencial  $|\tau|$  siempre es positiva, o nula.

En principio, el vector  $\mathbf{t}$  de tensión en un cuerpo depende del punto  $P$  sobre el que se evalúe y de la superficie que haya cortado (imaginariamente) dicho cuerpo. Con objeto de simplificar las ecuaciones de la mecánica de sólidos deformables Cauchy propuso la siguiente condición, que ha pasado a llamarse el *Principio de Cauchy*: el vector  $\mathbf{t}$  en un punto  $P \in \Omega$  que pertenece a una superficie interna sólo depende de  $P$  y de la normal  $\mathbf{n}$  a dicha superficie en  $P$ , matemáticamente:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(P, \mathbf{n}) . \quad (2.8)$$

No hace muchos años se demostró que esta hipótesis no es necesaria, sino que se puede demostrar que así ocurre siempre, y este resultado se conoce como el teorema de Noll, su descubridor.

---

<sup>1</sup> Esta aproximación de hecho ignora el efecto de fuerzas volumétricas entre ambas partes, que en la naturaleza son muy débiles.

## 4. El tensor de tensiones

El resultado fundamental del análisis del equilibrio en cuerpos deformables se debe al propio Cauchy y se conoce como el *teorema de Cauchy*, pues tiene demostración.

**Teorema 4.3:** (*Teorema de Cauchy*) *En un cuerpo deformable en equilibrio existe un campo de tensores  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(P)$  tal que el campo de tensiones y el de fuerzas de superficie se pueden expresar como*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(P, \mathbf{n}) &= \mathbf{T}(P)^T \mathbf{n}, \text{ Si } P \in \Omega \\ \mathbf{f}_s(P) &= \mathbf{T}(P)^T \mathbf{n}, \text{ Si } P \in \Gamma_t \end{aligned} \quad (2.9)$$

El tensor  $\mathbf{T}$  se conoce como el *tensor de tensiones*.

La razón por la que este resultado es tan importante es que simplifica la dependencia funcional de la tensión  $\mathbf{t}$  en cualquier punto interior del cuerpo y sobre cualquier superficie. De ser una dependencia no lineal  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(P, \mathbf{n})$ , ésta pasa a ser lineal en la normal  $\mathbf{n}$  y esto tiene unas consecuencias enormes, no sólo desde el punto de vista de cálculo, sino también en la obtención de las ecuaciones de equilibrio.

En una base cualquiera  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , y en particular en la base cartesiana  $\mathcal{B}_c = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , el teorema de Cauchy se puede expresar en componentes

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}, \\ \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_c} &= \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{yx} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{zy} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_c} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_c}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Aunque la expresión del tensor de tensiones cambia según la base, la expresión (2.9) es válida *en cualquier sistema de coordenadas*. Esta fórmula es una expresión intrínseca, ya que el teorema de Cauchy no hace referencia a ningún observador ni sistema de coordenadas.

### Observaciones 4.4:

- i. Las dimensiones del tensor de tensiones son de  $F/L^2$ . Habitualmente en ingeniería se emplean los MPa.

ii. El tensor de tensiones admite la siguiente descomposición:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{s} , \text{ siendo } p = -\frac{1}{3}\text{tr}[\mathbf{T}], \mathbf{s} = \mathbf{T} + p\mathbf{1} . \quad (2.11)$$

El escalar  $p$  es la presión asociada al tensor  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{s}$  es la tensión “desviadora”.

iii. Cuando conocemos el campo de tensores  $\mathbf{T}$ , conocemos *todo* el estado tensional del cuerpo, incluyendo las tensiones en el contorno.

iv. El campo de tensiones *es único*.

v. Cuando el campo de tensores no depende del punto, sino que es constante, se dice que el estado tensional es *homogéneo*.

□

DEMOSTRACIÓN: La demostración del teorema de Cauchy emplea los argumentos propuestos por el mismo Cauchy, usando el llamado “tetraedro de Cauchy”.

Sea un tetraedro diferencial recto centrado en el punto  $P \in \Omega$ , con uno de sus vértices coincidente con el centro de un sistema de coordenadas de base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . La cara opuesta al origen del sistema de coordenadas tiene área  $dA$  y normal  $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ . Las otras tres caras tienen áreas

$$dA_1 = n_1 dA , \quad dA_2 = n_2 dA , \quad dA_3 = n_3 dA . \quad (2.12)$$

Llamando  $\mathbf{t}$  a la tensión sobre el área  $dA$  y  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$  a las tensiones sobre las otras tres caras se tiene que

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(P, \mathbf{n}) , \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}(P, -\mathbf{e}_1) , \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}(P, -\mathbf{e}_2) , \mathbf{t}_3 = \mathbf{t}(P, -\mathbf{e}_3) , \quad (2.13)$$

y por tanto el equilibrio de fuerzas se expresa como:

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) dA + \mathbf{t}(P, -\mathbf{e}_1)n_1 dA + \mathbf{t}(P, -\mathbf{e}_2)n_2 dA + \mathbf{t}(P, -\mathbf{e}_3)n_3 dA + \mathbf{f}_v(P) dV = \mathbf{0} . \quad (2.14)$$

Como las fuerzas volumétricas multiplican a un infinitésimo de orden superior, éstas se pueden despreciar en la suma anterior. Para continuar, tomamos el límite en la ecuación anterior cuando  $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{e}_1$  para obtener

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{e}_1) = -\mathbf{t}(P, -\mathbf{e}_1) . \quad (2.15)$$

Como este resultado es válido para cualquier base y vector  $\mathbf{e}_1$  se concluye que

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(P, -\mathbf{n}) , \quad (2.16)$$

resultado conocido como *el corolario de Cauchy*. Utilizando este resultado en la ecuación (2.14) obtenemos

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = \mathbf{t}(P, \mathbf{e}_1)n_1 + \mathbf{t}(P, \mathbf{e}_2)n_2 + \mathbf{t}(P, \mathbf{e}_3)n_3 . \quad (2.17)$$

Esta relación expresa que la dependencia del vector  $\mathbf{t}$  en la normal  $\mathbf{n}$  es lineal y por lo tanto existe un tensor que denominamos  $\mathbf{T}^T$  tal que

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = \mathbf{T}^T(P)\mathbf{n} . \quad (2.18)$$

Si la normal  $\mathbf{n}$  coincide con una normal a la superficie exterior del cuerpo concluimos que

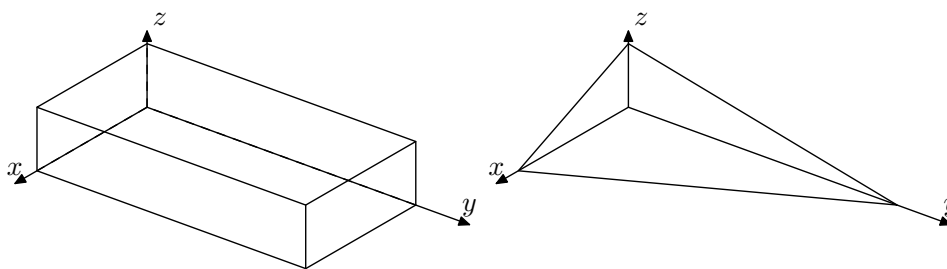
$$\mathbf{f}_s(P) = \mathbf{T}^T(P)\mathbf{n} . \quad (2.19)$$

■

**Ejemplo 4.5:** El paralelepípedo de la figura de la izquierda está sometido a un estado tensional que, en el sistema cartesiano indicado (con unidades de metros), se representa con la matriz

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} xy & y^2 & xz \\ y^2 & xz + yz & 0 \\ xz & 0 & z^2 \end{bmatrix} \text{ MPa} .$$

Calcular la tensión normal y tangencial sobre el plano de la derecha (pasa por tres vértices) en punto central del paralelepípedo. Datos  $L_x = 4$  m,  $L_y = 5$  m,  $L_z = 3$  m.



Consideramos tres vértices del paralelepípedo por los que pasa el plano de la figura de la derecha. Sus vectores de posición son  $\mathbf{r}_A = 4\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{r}_B = 5\mathbf{j}$  y  $\mathbf{r}_C = 3\mathbf{k}$ .

El vector unitario normal al plano de la figura es

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A)}{|(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A)|} = \frac{1}{\sqrt{769}}(15\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 20\mathbf{k}) .$$

El punto central del paralelepípedo sobre el cual se desea calcular las tensiones es  $P \equiv (2, 2.5, 1.5)$  m y la tensión en  $P$  sobre el plano es:

$$\{\mathbf{t}(P, \mathbf{n})\} = \begin{bmatrix} 5 & 25/4 & 3 \\ 25/4 & 27/4 & 0 \\ 3 & 0 & 9/4 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{769}} \begin{Bmatrix} 15 \\ 12 \\ 20 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{769}} \begin{Bmatrix} 210 \\ 699 \\ 90 \end{Bmatrix} \text{ MPa} .$$

Las componentes intrínsecas de este vector son:

$$\sigma_n = \mathbf{t}(P, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \frac{7047}{769} \text{ MPa} , \quad |\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - \sigma_n^2} = 4.86 \text{ MPa} .$$

△

#### 4.1. Interpretación física de las componentes del tensor de tensiones

Cada una de las componentes de  $\mathbf{T}$  en una base tiene un significado especial y en ingeniería reciben nombres que hacen referencia a su dirección, como veremos a continuación. Si escogemos una base cualquiera  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , el vector tensión en un punto  $P \in \Omega$  que actúa sobre una superficie de normal  $\mathbf{e}_i$  que pasa por dicho punto es  $\mathbf{t}_i = \mathbf{T}^T \mathbf{e}_i$ . La **tensión normal** a esta superficie es por tanto

$$\sigma_i = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{e}_i = T_{ii}$$

y las **tensiones tangenciales o cortantes** a esta superficie son por tanto

$$\tau_{ij} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{e}_i = T_{ij} \quad \text{con } i \neq j . \quad (2.20)$$

En general, la componente  $T_{ij}$  es el valor de la tensión que actúa sobre una superficie de normal  $\mathbf{e}_i$ , en dirección  $\mathbf{e}_j$ . A la tensión  $T_{ii}$  se le da el símbolo especial  $\sigma_i$  y, cuando  $i \neq j$ , se emplea la notación  $\tau_{ij} = T_{ij}$ .

Lo anterior aplica también a las componentes de  $\mathbf{T}$  en la base cartesiana  $\mathcal{B}_c = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ . En ésta tenemos las tres tensiones normales

$$\sigma_x = T_{xx} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{i} , \quad \sigma_y = T_{yy} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{j} , \quad \sigma_z = T_{zz} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{k} , \quad (2.21)$$

y las tensiones tangenciales

$$\tau_{xy} = T_{xy} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{i} , \quad \tau_{xz} = T_{xz} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{i} , \quad \tau_{yx} = T_{yx} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{i} , \quad \dots \quad (2.22)$$

En la Figura 2.2 se pueden apreciar algunas de las componentes del tensor de tensión sobre un cubo diferencial

## 5. Ecuaciones de equilibrio

En esta sección se obtienen las ecuaciones que expresan que un cuerpo deformable está en equilibrio.

### 5.1. Principio fundamental

De la misma manera que Newton estableció en su segunda ley las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de una partícula, y que luego se extienden al caso de los sólidos rígidos añadiendo la condición del equilibrio de momentos, existen un principio fundamental que generaliza los dos anteriores al caso de los cuerpos deformables. Como tal principio no es demostrable, pero es fundamental pues en él se basa el estudio del equilibrio de sólidos, fluidos y estructuras deformables.

El *principio fundamental de la estática de los cuerpos deformables* establece que toda región  $\mathcal{R}$  contenida o igual a un cuerpo deformable  $\Omega$  está en equilibrio estático. De forma matemática:

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{f}_v dV + \int_{\partial\mathcal{R} \setminus \Gamma} \mathbf{t} dA + \int_{\partial\mathcal{R} \cap \Gamma} \mathbf{f}_s dA = \mathbf{0} , \quad \text{para toda } \mathcal{R} \subseteq \Omega \quad (2.23)$$

Más aún, para que el equilibrio estático sea completo, el momento resultante de todas las fuerzas que actúan sobre  $\mathcal{R}$  también ha de ser nulo, así pues, para un sistema de referencia arbitrario, podemos escribir:

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_v dV + \int_{\partial\mathcal{R} \setminus \Gamma} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dA + \int_{\partial\mathcal{R} \cap \Gamma} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_s dA = \mathbf{0} , \quad \text{para toda } \mathcal{R} \subseteq \Omega \quad (2.24)$$

siendo  $\mathbf{r}$  el vector de posición de los puntos en  $\mathcal{R}$ .

Las expresiones (2.23) y (2.24) tienen forma integral y su forma diferencial es mucho más útil por lo que la obtenemos a continuación. Existen dos maneras de

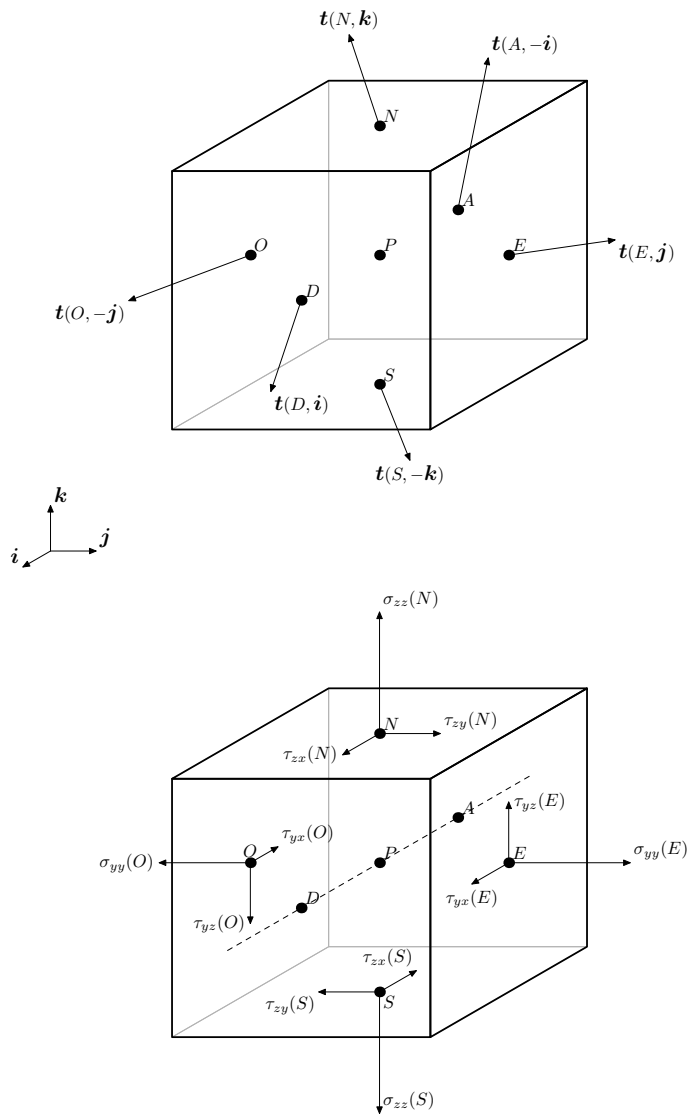


Figura 2.2: Vectores tensión y sus componentes sobre un cubo diferencial



llegar a ellas: de forma “gráfica” y de forma analítica. A continuación describimos la última de ellas y dejamos la primera para desarrollarla en clase.

## 5.2. Equilibrio de fuerzas

Empleando el Principio de Cauchy, las dos integrales de superficie de la expresión (2.23) se pueden escribir como:

$$\int_{\partial\mathcal{R}\setminus\Gamma} \mathbf{t} \, dA + \int_{\partial\mathcal{R}\cap\Gamma} \mathbf{f}_s \, dA = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{T}\mathbf{n} \, dA . \quad (2.25)$$

Empleando el teorema de la divergencia sobre la región  $\mathcal{R}$ , esta integral de superficie se puede expresar como:

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{T}^T \mathbf{n} \, dA = \int_{\mathcal{R}} \operatorname{div} \mathbf{T}^T \, dv . \quad (2.26)$$

Sustituyendo este resultado en la expresión (2.23), se obtiene

$$\int_{\mathcal{R}} (\operatorname{div} \mathbf{T}^T + \mathbf{f}_v) \, dv = \mathbf{0} . \quad (2.27)$$

Pero esta última expresión es válida *para cualquier región  $\mathcal{R}$  del cuerpo*, y eso únicamente es posible si el integrando es idénticamente cero en todo punto, es decir

$$\operatorname{div} \mathbf{T}^T + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} . \quad (2.28)$$

## 5.3. Equilibrio de momentos

La demostración analítica de la expresión diferencial correspondiente a la ecuación (2.24) requiere unas operaciones tensoriales que están fuera del temario, así pues sólo indicamos el resultado de las mismas. Empleando el principio de Cauchy de la misma manera que en la sección anterior, la ecuación integral del equilibrio de momentos se puede escribir como:

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_v \, dV + \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r} \times (\mathbf{T}^T \mathbf{n}) \, dA = \mathbf{0} . \quad (2.29)$$

Usando (2.28) en la primera integral e integrando por partes la segunda se obtiene

(sin demostrar)

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{r} \times (-\operatorname{div} \mathbf{T}^T) \, dv + \int_{\mathcal{R}} \operatorname{hemi}[\mathbf{T}] \, dv - \int_{\mathcal{R}} \mathbf{r} \times (\operatorname{div} \mathbf{T}^T) \, dv = \mathbf{0} , \quad (2.30)$$

siendo  $\operatorname{hemi}$  el operador que obtiene la parte hemisimétrica de un tensor. Cancelando los términos con las divergencias se obtiene

$$\int_{\mathcal{R}} \operatorname{hemi}[\mathbf{T}] \, dv = \mathbf{0} , \quad (2.31)$$

y como este resultado ha de ser válido para cualquier región  $\mathcal{R}$ , concluimos que el integrando se anula y por tanto la parte hemisimétrica de  $\mathbf{T}$  ha de ser cero, es decir,  $\mathbf{T}$  es un tensor simétrico. Resumiendo, las dos ecuaciones de equilibrio de los cuerpos deformables se pueden escribir de forma diferencial como

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} , \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^T . \quad (2.32)$$

## 6. Tensiones principales y direcciones principales de tensión

A partir del estado tensional de un cuerpo  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(P)$  podemos calcular el vector tensión  $\mathbf{t}(P, \mathbf{n})$  que actúa sobre cada unidad de superficie en el punto  $P$  con normal  $\mathbf{n}$ . La dirección del vector tensión no se conoce a priori, y dependiendo del estado tensional, puede ser cualquiera.

En particular, surge el interrogante de si, dado la tensión en un punto  $\mathbf{T}(P)$ , se puede cortar el cuerpo por una superficie tal que el vector tensión  $\mathbf{t}(P, \mathbf{n})$  resulta tener la misma dirección que la normal  $\mathbf{n}$ . Para resolver esta cuestión, planteamos matemáticamente:

$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} . \quad (2.33)$$

La cuestión planteada es equivalente a encontrar los autovectores del tensor  $\mathbf{T}$ , que por ser simétrico, siempre son ortonormales. Los autovalores asociados serán reales siempre. Los valores propios de  $\mathbf{T}$  se conocen como las *tensiones principales* y los autovalores como las *direcciones principales de tensión*.

Los tres autovectores son ortonormales y forman una base  $\mathcal{B}_p = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  denominada la *base principal* de tensión en el punto  $P$ . Las tensiones principales se suelen indicar como  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  y, por convenio, salvo que se indique lo contrario se tomará siempre de forma que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 . \quad (2.34)$$

La base principal diagonaliza el tensor de tensiones. En otras palabras, la matriz asociada a  $\mathbf{T}$  en la base  $\mathcal{B}_p$  es diagonal de la forma

$$[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}_p} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Las tensiones principales y las direcciones principales de tensión son, en general, distintas en cada punto de un cuerpo deformable. Sólo si el estado tensional es homogéneo todas ellas serán las mismas en todo el cuerpo. Proporcionan información muy útil para comprender el estado tensional *en un punto*, y no tiene sentido hablar de las tensiones principales de un cuerpo o de sus direcciones principales de tensión.

### Observaciones 6.6:

- i. Cuando dos tensiones principales son idénticas se dice que el tensor de tensiones es *cilíndrico*. En este caso hay un dirección principal, la asociada a la tensión principal distinta, y un plano de direcciones principales. Dos vectores unitarios cualesquiera, ortogonales entre sí, forman, junto con la primera dirección principal, la base principal de tensiones.
- ii. Si las tres tensiones principales son iguales, se dice que el tensor de tensiones es *esférico*. Cualquier vector es una dirección principal de tensión y cualquier base es una base principal.  $\square$

## 7. Representación gráfica de un tensor de tensiones

Como un tensor (simétrico) es un objeto difícil de interpretar se han propuesto varias representaciones gráficas que proporcionan algo de información sobre el mismo y permite una evaluación cualitativa sus propiedades. La representación más útil en mecánica de sólidos es el llamado *diagrama de Mohr* que representa gráficamente en un diagrama cartesiano todos los posibles valores de las componentes intrínsecas de tensión asociadas al tensor de tensiones *en un punto*. En realidad, se puede emplear el diagrama de Mohr para representar gráficamente las propiedades de cualquier tensor simétrico, por ejemplo, el tensor de inercia.

La forma de construir el diagrama de Mohr sería la siguiente. Dado un tensor simétrico  $\mathbf{T}$ , escogemos un vector unitario cualquiera  $\mathbf{n}_1$ . El vector tensión cuando el cuerpo se corta con una superficie de normal  $\mathbf{n}_1$  es  $\mathbf{t}_1 = \mathbf{T}\mathbf{n}_1$ , cuyas tensiones

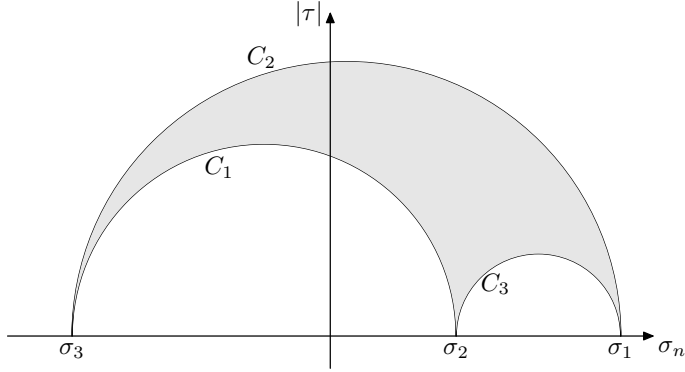


Figura 2.3: Diagrama de Mohr

intrínsecas son  $\sigma_n^1$  y  $|\tau|^1$ . En un diagrama cartesiano se puede dibujar el punto de coordenadas  $(\sigma_n^1, |\tau|^1)$ . Si ahora escogemos un vector unitario distinto  $\mathbf{n}_2$  podemos, por el mismo razonamiento, calcular las tensiones intrínsecas  $\sigma_n^2$  y  $|\tau|^2$  y dibujarlas también en el mismo diagrama cartesiano sobre el punto de coordenadas  $(\sigma_n^2, |\tau|^2)$ . Este proceso se puede repetir indefinidamente seleccionando siempre vectores unitarios y marcando en el diagrama cartesiano las tensiones intrínsecas resultantes. El resultado de este proceso es, en el límite, una superficie acotada por tres círculos que tiene la forma de la Figura 2.3.

La demostración de que la superficie de posibles componentes intrínsecas es la indicada en la Figura 2.3 es la siguiente. En primer lugar, como  $|\tau|$  es no negativo, la superficie ha de estar siempre en la parte por encima del eje de abscisas. Además, como  $\sigma_n$  y  $|\tau|$  son funciones continuas de  $\mathbf{T}$  y de  $\mathbf{n}$ , la superficie ha de ser conexa. Más aún, como hay tres tensiones principales únicamente, la superficie intersecta el eje de abscisas únicamente en tres puntos,  $(\sigma_i, 0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Para continuar, expresamos el tensor  $\mathbf{T}$  en su base principal y escogemos vectores normales  $\mathbf{n}$  que, también expresados en la base principal, son de la forma  $\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{v}_1 + \cos \beta \mathbf{v}_2 + \cos \gamma \mathbf{v}_3$ . Los ángulos  $\alpha, \beta, \gamma$  son los formados por  $\mathbf{n}$  y cada una de las direcciones principales. El vector tensión expresado en esta base es  $\mathbf{t} = \sigma_1 \cos \alpha \mathbf{v}_1 + \sigma_2 \cos \beta \mathbf{v}_2 + \sigma_3 \cos \gamma \mathbf{v}_3$  y por tanto sus componentes intrínsecas

son de la forma:

$$\sigma_n = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \cos \alpha \\ \sigma_2 \cos \beta \\ \sigma_3 \cos \gamma \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma , \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} |\tau|^2 &= \sigma_1^2 \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) + \sigma_2^2 \cos^2 \beta (1 - \cos^2 \beta) + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma (1 - \cos^2 \gamma) \\ &= \sigma_1^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta \sin^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma , \end{aligned}$$

con la restricción  $1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$ . Si eliminamos  $\cos \gamma$  de la restricción, podemos interpretar (2.36) como la ecuación paramétrica de una superficie en el plano.

Para continuar definimos  $\hat{\alpha} \in [0, \pi/2]$  el ángulo que satisface  $\cos \hat{\alpha} = |\cos \alpha|$  y análogamente  $\hat{\beta}$  y  $\hat{\gamma}$ , limitándonos a partir de ahora a estudiar el diagrama de Mohr para vectores normales unitarios de la forma  $\mathbf{n} = \cos \hat{\alpha} \mathbf{v}_1 + \cos \hat{\beta} \mathbf{v}_2 + \cos \hat{\gamma} \mathbf{v}_3$ . Si estudiamos el caso límite, por ejemplo,  $\hat{\gamma} = \pi/2$ , es decir el lugar geométrico en el plano  $(\sigma_n, |\tau|)$  correspondiente a aquellos planos de normal perpendicular a  $\mathbf{v}_3$ , obtenemos a partir de (2.36) que  $\cos^2 \hat{\beta} = \sin^2 \hat{\alpha}$  y

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_1 \cos^2 \hat{\alpha} + \sigma_2 \sin^2 \hat{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} (\cos^2 \hat{\alpha} + 1 - \sin^2 \hat{\alpha}) + \frac{\sigma_2}{2} (\sin^2 \hat{\alpha} + 1 - \cos^2 \hat{\alpha}) \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\hat{\alpha} , \\ |\tau|^2 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\hat{\alpha} . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Interpretamos que una parte del contorno de la superficie que buscamos es un arco de circunferencia centrado en  $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$  y con radio  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ . Esta semicircunferencia la denominamos  $C_3$ , el lugar geométrico de los componentes intrínsecas de tensión en planos cuya normal es perpendicular a  $\mathbf{v}_3$ . Repitiendo el mismo argumento, pero escogiendo planos cuyas normales sean perpendiculares a  $\mathbf{v}_1$  y a  $\mathbf{v}_2$  obtenemos que el contorno de la región admisible es la unión de  $C_3$  con otras dos semicircunferencias que llamamos  $C_1$  y  $C_2$  cuyas propiedades son análogas a las de  $C_3$ . Estas tres circunferencias están indicadas en la Figura 2.3.

De esta construcción se sigue que dado el diagrama de Mohr correspondiente al estado tensional en un punto, y considerando un plano que corta al sólido pasando por dicho punto y con normal  $\mathbf{n} = \cos \hat{\alpha} \mathbf{v}_1 + \cos \hat{\beta} \mathbf{v}_2 + \cos \hat{\gamma} \mathbf{v}_3$ , las componentes intrínsecas del vector tensión se representan en el plano  $(\sigma_n, |\tau|)$  en un punto que

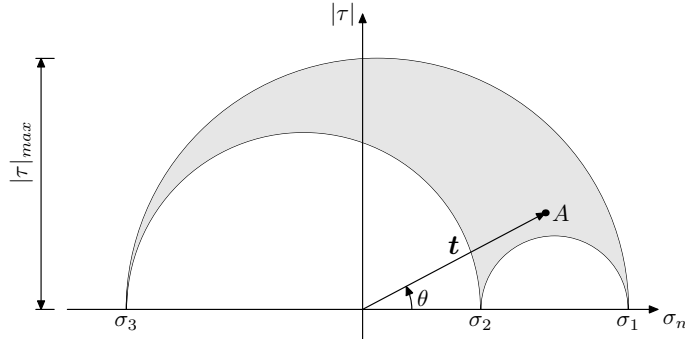


Figura 2.4: Representación gráfica del estado tensional sobre un plano.

debe de estar dentro de la superficie delimitada por  $C_1, C_2$  y  $C_3$ .

Más aún, el diagrama de Mohr permite la construcción inversa, aunque esta no la demostramos. Dado un punto  $A$  dentro de la región comprendida entre las tres circunferencias de Mohr, es posible determinar de forma gráfica el valor de  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ , los ángulos que forman la normal al plano cuyas componentes intrínsecas se corresponden con el punto  $A$ . En la Figura 2.5 se indica la construcción geométrica.

### Observaciones 7.7:

- i. El diagrama de Mohr no permite distinguir las componentes intrínsecas de los vectores tensión correspondientes a normales que forman ángulos mayores de  $\pi/2$  con los ejes principales. En términos geométricos, el diagrama de Mohr representa las componentes intrínsecas en planos cuyas normales pertenecen al primer octante del sistema de coordenadas principal.
- ii. El diagrama de Mohr de un estado tensional cilíndrico es simplemente una semicircunferencia que corta al eje horizontal en  $\sigma_1, \sigma_3$ . Si el estado tensional es esférico, el diagrama de Mohr degenera en un punto sobre el eje horizontal de coordenada  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ .
- iii. Los estados tensiones de planos cuya normal es perpendicular la dirección principal primera  $\mathbf{v}_1$  se corresponden con los puntos de  $C_1$  (análogamente, para  $C_2$  y  $C_3$ ).
- iv. La mayor tensión cortante  $|\tau|_{max}$  en un punto se corresponde con el radio de la mayor circunferencia de Mohr. Ver Figura 2.4.

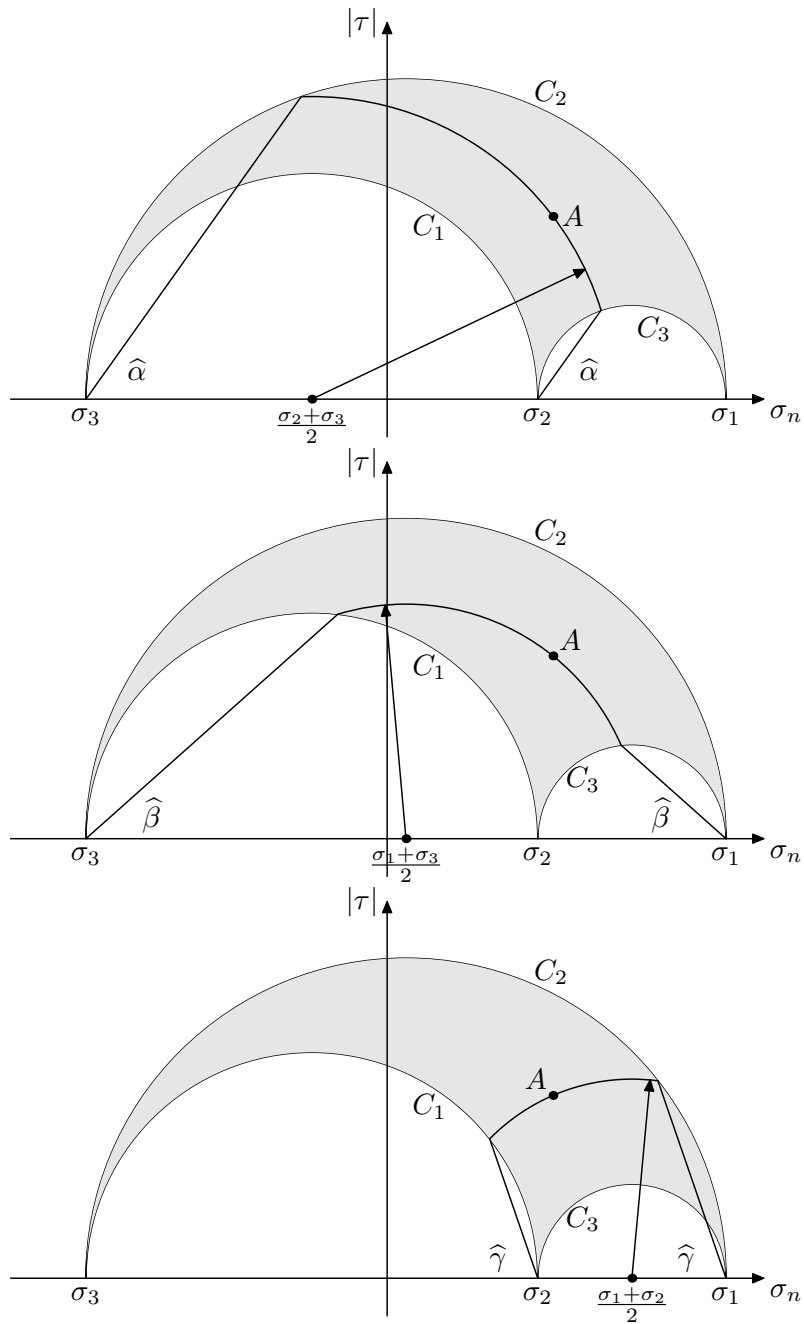


Figura 2.5: Obtención gráfica de los ángulos  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$  en el diagrama de Mohr

- v. El módulo del vector  $\mathbf{t}$  correspondiente a un plano cuya representación en el diagrama de Mohr es el punto  $A$ , es la distancia del centro de coordenadas a dicho punto (ver Figura 2.4). Además, el ángulo que forma el vector  $\mathbf{t}$  y la normal al plano es  $\theta$ .

□

**Ejemplo 7.8:** El estado tensional en un punto de un sólido deformable tiene una expresión matricial respecto al sistema de coordenadas  $x, y, z$  que es

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ MPa .}$$

Se pide:

1. Determinar las tensiones principales y dibujar el diagrama de Mohr del estado tensional.
2. Calcular la tensión tangencial máxima en el punto e indicar el ángulo que forma la normal del plano correspondiente con los tres ejes principales de tensión.
3. Calcular el ángulo que forma el eje  $x$  con cada una de las direcciones principales de tensión.

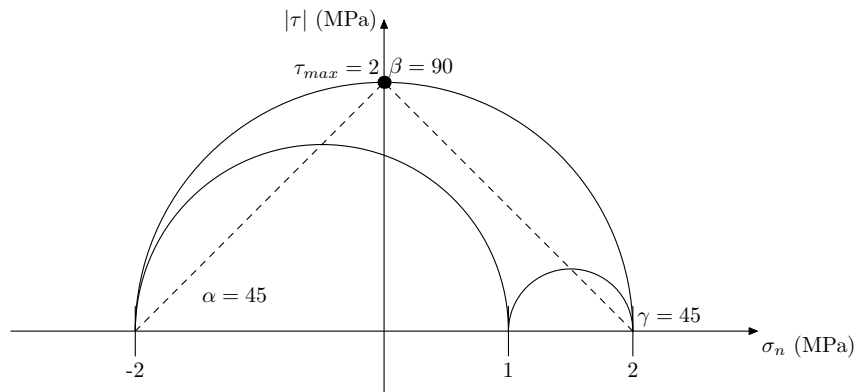
- 
- 1) Los autovalores de  $\mathbf{T}$  son las raíces del polinomio característico

$$(1 - \lambda)((-1 - \lambda)(1 - \lambda) - 3) = 0,$$

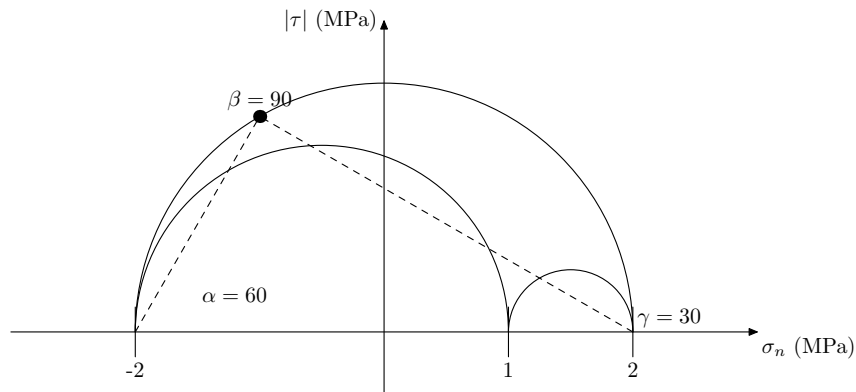
es decir  $\lambda_1 = 2$  MPa,  $\lambda_2 = 1$  MPa,  $\lambda_3 = -2$  MPa.

- 2) La tensión tangencial máxima es el radio del círculo de Mohr mayor, es decir  $\tau_{max} = 2$  MPa. En la figura se calculan gráficamente los ángulos de la normal al plano con mayor tensión tangencial respecto de los ejes principales ( $\alpha = 45^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 45^\circ$ ).





3) El eje  $x$  es normal al un plano sobre el cual actúa una tensión normal  $\sigma_n = \sigma_x = -1$  MPa y una tensión tangencial de módulo  $|\tau| = |\tau_{xy}| = \sqrt{3}$  MPa. Dibujando este punto sobre el diagrama de Mohr encontramos los ángulos que forma el eje  $x$  con las direcciones principales ( $\alpha = 60^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 30^\circ$ ).



△

## 8. Problemas

2.1 Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) Las tensiones principales en un punto de un sólido son  $\sigma_1 = 8$  MPa,  $\sigma_2 = 0$

MPa,  $\sigma_3 = -5$  MPa. ¿Hay algún plano tal que la tensión normal y tangencial en el mismo valgan  $\sigma_n = 2$  MPa y  $\tau = 3$  MPa? ¿y cuando  $\sigma_n = 5$  MPa y  $\tau = 1$  MPa?

- b) Un sólido posee un estado tensional esférico con  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ . Su diagrama de Mohr corresponde a tres círculos idénticos de centro en el origen y radio  $p$ .
- c) Un sólido deformable cuyo tensor de tensiones sea el mismo en todo punto no puede estar sometido a ninguna fuerza volmétrica.
- d) Si tomamos  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,

$$1 \text{ MPa} = 1 \text{ kp/cm}^2$$

- e) La única fuerza volumétrica que puede actuar sobre un cuerpo es el peso.

**2.2** Un sólido deformable en equilibrio se encuentra sometido a un campo de tensiones cuya expresión matricial, en un sistema cartesiano de coordenadas es:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 3\kappa x^2 & 2\kappa xy & \sqrt{2}\kappa y^2 \\ \tau_{yx} & \kappa x^2 & \kappa(y^2 + x^2) \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \kappa(z^2 + xz) \end{bmatrix}.$$

- a) ¿Cuánto valen  $\sigma_x, \tau_{zx}$  y  $\tau_{zy}$ ?
- b) ¿Cuáles son las dimensiones de  $\kappa$ ?
- c) ¿Cuál es el campo de fuerzas volumétricas que actúa sobre el cuerpo?
- d) ¿Cuál es la tensión que se aplica desde el exterior en un punto de la superficie  $(x, y, z) = (1, 1, 2)$  m en el que la normal tiene valor  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ . ¿Cuáles son sus componentes intrínsecas?
- e) Encuentra las tensiones principales en el punto  $(x, y, z) = (1, 0, 1)$  m si  $\kappa = 2 \cdot 10^6 \text{ N/m}^4$ .

**2.3** Comprueba que en los siguientes casos el estado tensional propuesto verifica las ecuaciones de equilibrio en el interior y en el contorno del cuerpo.

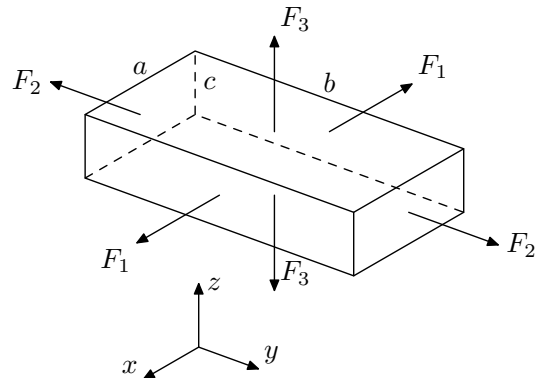
- a) Un sólido deformable sometido a presión exterior uniforme de valor  $p$  tiene tensor de tensiones  $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$ , siendo  $\mathbf{I}$  el tensor unidad.

- b) Un cilindro cuyo eje de revolución coincide con  $\mathbf{k}$  se encuentra sometido a una presión  $p$  en sus caras planas y a presión  $q$  en su superficie lateral tiene un estado tensional cuya expresión matricial en el sistema cartesiano es:

$$[\mathbf{T}]_{xyz} = \begin{bmatrix} -q & 0 & 0 \\ 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

- c) Un paralelepípedo como el de la figura tiene lados de dimensiones  $a, b$  y  $c$ . Este cuerpo se encuentra sometido a tensiones normales sobre sus caras uniformemente repartidas cuyas resultantes son, como indica la figura,  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ . El estado tensional del cuerpo es:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \frac{F_1}{bc} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_2}{ac} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F_3}{ab} \end{bmatrix}$$



**2.4** Un cuerpo deformable está sometido a un estado tensional homogéneo cuya representación matricial en un sistema cartesiano de coordenadas es:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 5/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ MPa .}$$

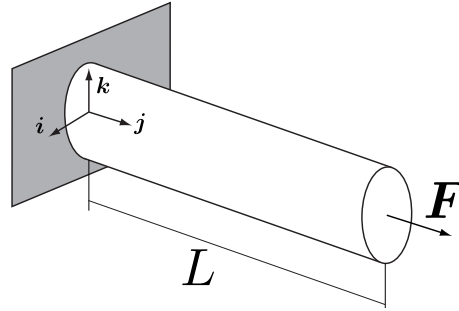
- 1) Dibujar el diagrama de Mohr correspondiente al estado tensional.

Si cortamos el cuerpo con un plano de vector normal  $\mathbf{n}$  tal que el vector tensión  $\mathbf{t}$  actuando sobre dicho plano sólo tenga componente tangencial:

- 2) Calcular el módulo de todos los posibles vectores  $\mathbf{t}$ .
- 3) Indicar los ángulos que forman, en cada caso,  $\mathbf{n}$  con la segunda dirección principal.

**2.5** Un cilindro deformable de longitud  $L$  y radio  $a$  está sujeto por un extremo y sometido a la acción de una fuerza  $\mathbf{F}$  normal a su superficie libre y repartida uniformemente sobre ella.

Sabiendo que el cilindro está en equilibrio, postular una expresión para el tensor de tensiones y comprobar que verifica las ecuaciones de equilibrio en el interior y el en contorno.



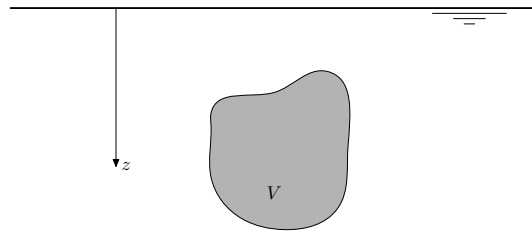
Además, encontrar el valor del vector tensión actuando en los siguientes puntos y planos, indicando sus componentes normal y tangencial,

- Punto  $A = L\mathbf{j}$ , normal  $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ .
- Punto  $B = \frac{L}{2}\mathbf{j}$ , normal  $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ .
- Punto  $B$ , normal  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ .
- Punto  $B$ , normal  $\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{j} + \mathbf{k})$ .

**2.6** Si las tensiones principales en un punto de un sólido elástico valen 30, 10 y -10 MPa respectivamente, se pide:

- Hallar el módulo del vector tensión para la dirección en la que aparezca  $\tau_{max}$ .
- Hallar las componentes intrínsecas de la tensión en la dirección que forma  $30^\circ$  con la dirección principal 1 y  $60^\circ$  con la dirección principal 2.

**2.7** Un sólido deformable de volumen  $V$  se encuentra en equilibrio, sumergido en un fluido de peso específico  $\gamma$  y sometido a una fuerza volumétrica. El estado tensional del cuerpo se expresa, en el sistema de coordenadas de la figura, con una matriz de expresión:

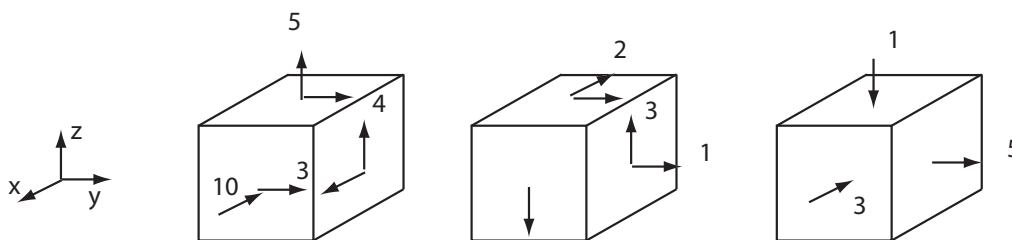


$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -\gamma z & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma z & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma z \end{bmatrix} = -\gamma z [\mathbf{I}] .$$

- i) Encontrar el valor del campo de fuerzas volumétricas actuando sobre el cuerpo.
- ii) Comprobar que cada punto de la superficie del cuerpo está sometido a la acción de la presión hidrostática y que ésta no tiene componente tangencial.
- iii) Encontrar el valor de la resultante de las fuerzas ejercidas por el fluido sobre el cuerpo, demostrando que es el vector opuesto al peso del volumen desplazado, es decir, el principio de Arquímedes.

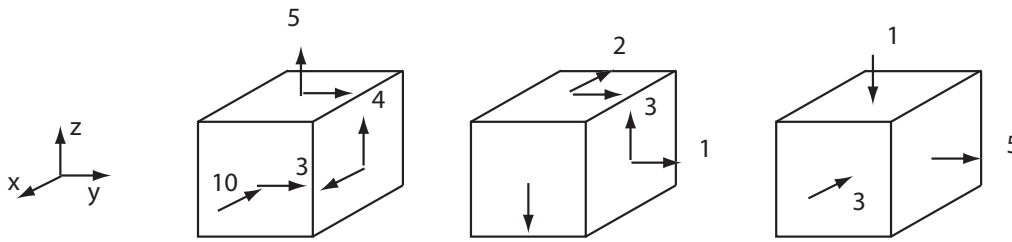
**2.8** En la figura aparecen dibujados tres estados tensionales, con las tensiones en MPa. Para cada uno de ellos,

- a) Dibuja las componentes de los vectores tensión en las caras ocultas de los cubos diferenciales.
- b) Indica la expresión del tensor de tensiones en la base cartesiana de la figura.

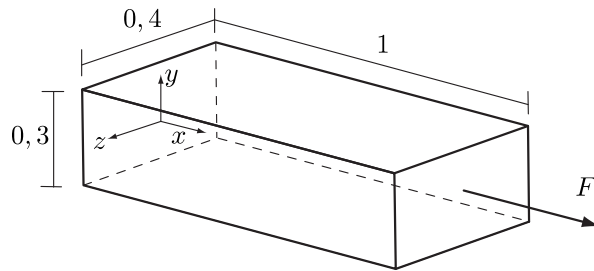


**2.9** En la figura aparecen dibujados tres estados tensionales, con las tensiones en MPa. Para cada uno de ellos,

- Dibuja las componentes de los vectores tensión en las caras ocultas de los cubos diferenciales.
- Indica la expresión del tensor de tensiones en la base cartesiana de la figura.



**2.10** Un paralelepípedo deformable tiene las dimensiones en metros que se indican en la figura. El cuerpo está sujeto en el plano  $x = 0$  y sometido a una fuerza axial  $F$  en dirección del eje  $x$ , aplicada uniformemente sobre la cara  $x = 1$  m. Cuando se aplica una fuerza, el cuerpo se parte por el plano  $x + y = 0,5$ . Para repararlo se emplea un pegamento que resiste tensiones normales y tangenciales máximas de valor:

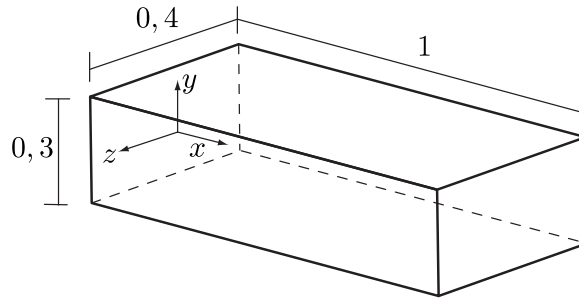


$$\sigma_{max} = 40 \text{ KPa} , \quad \tau_{max} = 80 \text{ KPa} .$$

- Postula la expresión matricial del tensor de tensiones  $\mathbf{T}(x, y, z)$  (no es necesario verificar que cumple las ecuaciones de equilibrio).
- Calcula las componentes intrínsecas de tensión sobre el plano  $x + y = 0,5$ .
- ¿Cuál es el valor de la fuerza máxima que puede resistir el cuerpo reparado suponiendo que la zona más débil del mismo es la superficie pegada?

**2.11** El sólido deformable de la figura se encuentra sometido a un estado tensional  $\mathbf{T}(x, y, z)$  del cual se sabe que

$$\begin{aligned}\sigma_z = \sigma_y = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \\ \sigma_x = y(2 + (1 - x)) \text{ MPa},\end{aligned}$$



y que la tensión  $\tau_{xy}$  no depende de la variable  $z$ . Las caras del cuerpo perpendiculares a los ejes  $y$  y  $z$  están libres de tensiones y el cuerpo no está sometido a ninguna fuerza volumétrica.

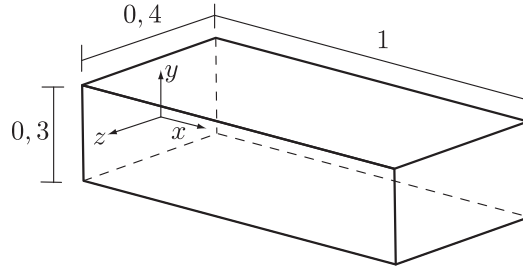
- 1) Demuestra que  $\tau_{xy} = \frac{1}{2}(y^2 - 0.15^2)$ .
- 2) Dibuja el diagrama de Mohr del estado tensional en el punto  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . (nota: cotas en metros. El sistema de coordenadas está situado en el centro de la cara menor y sus ejes son paralelos a las aristas del sólido)

**2.12** Las tensiones principales en un punto son 2, 5 y 7 MPa, respectivamente. Identifica gráficamente la tensión cortante máxima y mínima (en valor absoluto) de aquellos planos en los que:

- a) La tensión normal es 6 MPa.
- b) La tensión tiene módulo 6 MPa.
- c) La tensión normal es el doble de la tensión tangencial.
- d) El ángulo que forma su normal con el eje principal primero es de  $30^\circ$ .

**2.13** El paralelepípedo de la figura está sometido a un campo de tensiones cuya representación matricial en el sistema indicado es:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} x^2 & zy^2 & z^2 \\ zy^2 & x & 0 \\ z^2 & 0 & xz \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$



Si las dimensiones de la figura son metros,

- 1) Calcular la fuerza que se ejerce sobre la cara  $x = 1$  m del sólido.
- 2) Calcular la fuerza volumétrica *total* que se realiza sobre el cuerpo.
- 3) ¿En qué punto de la cara  $x = 1$  m aparece la mayor tensión tangencial?

(nota: cotas en metros)

**2.14** Un cuerpo deformable ocupa un volumen  $V$  y está sometido a un estado tensional que, referido a una base cartesiana, es de la forma

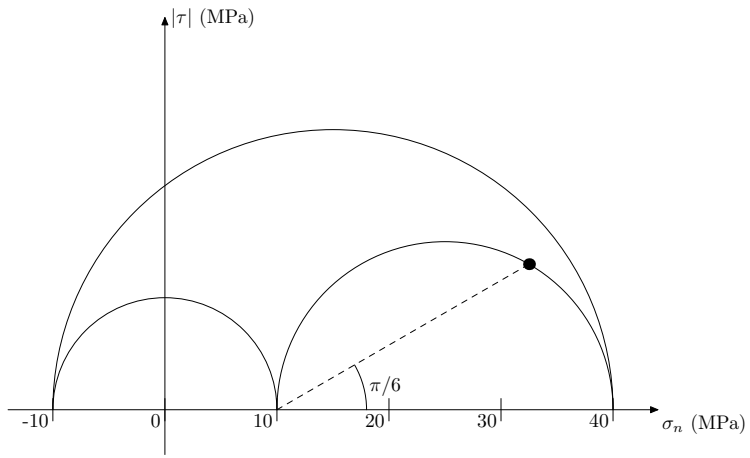
$$[\mathbf{T}(x, y, z)] = K \begin{bmatrix} x^2y & yz^2 & -2xyz - z^3/3 \\ yz^2 & -y^3/3 & y^2z \\ -2xyz - z^3/3 & y^2z & 0 \end{bmatrix},$$

siendo  $K$  una constante con dimensiones de  $F/L^5$ . Comprobar que la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el contorno del cuerpo es nula.

**2.15** Un punto de un cuerpo deformable está sometido a un estado tensional cuyo diagrama de Mohr se muestra en la figura. Sobre este diagrama se indica un punto que se corresponde con las componentes intrínsecas de tensión sobre un plano de normal  $\mathbf{n}$ .

- 1) Determina gráficamente el valor de  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ .
- 2) Calcula el vector tensión  $\mathbf{t}$  sobre dicho plano.
- 3) Indica qué ángulo forma  $\mathbf{t}$  con  $\mathbf{n}$ .







# Capítulo 3

## Análisis de la deformación de los cuerpos

---

### 1. Introducción

En el capítulo 2 se ha estudiado la distribución de fuerzas internas en los cuerpos deformables, que es una de las diferencias fundamentales con los cuerpos rígidos. En este capítulo nos ocupamos del estudio de la deformabilidad en sí misma, como concepto geométrico. En primer lugar la propondremos una definición matemática de dicho concepto y nos ocuparemos, a continuación, de calcularla exactamente en todos los puntos de un cuerpo, suponiendo que las deformaciones son pequeñas.

La hipótesis de pequeñas deformaciones limita la aplicabilidad de los conceptos

presentados en este capítulo, pero no se debe de olvidar que la gran mayoría de las estructuras y de las máquinas trabajan en situaciones de pequeñas deformaciones así pues sus aplicaciones son numerosas. El estudio de las llamadas *deformaciones finitas* o *grandes deformaciones* queda para cursos más avanzados.

Una vez que el concepto de deformación esté claramente definido estudiaremos, en el capítulo 4, que existe una relación, llamada *constitutiva*, entre las tensiones y las deformaciones, cerrando con ello el planteamiento del modelo del cuerpo deformable.

## 2. Cinemática de un cuerpo deformable

Un cuerpo sometido a fuerzas y acciones externas puede responder de manera que sus puntos cambien de posición. Dado un punto  $P \in \Omega$ , denominamos  $P'$  la posición en el espacio que el punto  $P$  ocupa después de que el cuerpo sufra las acciones exteriores. Definimos el **campo de desplazamientos**  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  como

$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{r}_{P'} - \mathbf{r}_P \quad (3.1)$$

siendo  $\mathbf{r}_{P'}$  y  $\mathbf{r}_P$  los vectores de posición de los puntos  $P'$  y  $P$  respectivamente respecto de un sistema de coordenadas cualquiera, pero fijo. El concepto de campo de desplazamiento se estudia en el modelo de los cuerpos rígidos, pues no es exclusivo de los cuerpos deformables.

Sin embargo, intuitivamente, se entiende que el concepto de deformación, aunque relacionado con el desplazamiento, no es lo mismo. Un cuerpo en el que todos sus puntos se desplazan con un campo  $\mathbf{u}$  constante sabemos que no se deforma. Tampoco se deforma un cuerpo que rota alrededor de un eje o de un punto fijo.

La definición precisa del concepto de deformación no es evidente. Los cuerpos tienen muchas maneras de deformarse, si se miran en su conjunto. Sin embargo, localmente (a nivel diferencial) veremos que sólo hay dos modos de deformación. Lo que define a la deformación es el desplazamiento relativo, y para ello es necesario estudiar el campo cinemático en el entorno de cada punto, porque, a diferencia de lo que ocurre en los sólidos rígidos, cada entorno se puede deformar de forma distinta. Así, en una estructura sometida a cargas se puede hablar de que una viga está muy deformada y otra no; en el chasis de un vehículo, una parte está muy deformada y otra a penas, etc.

A pesar de la aparente dificultad en describir la deformación en toda generalidad, argumentamos a continuación que a nivel local sólo existen dos tipos de deformaciones. El primer tipo de deformación que existe se refiere al cambio de

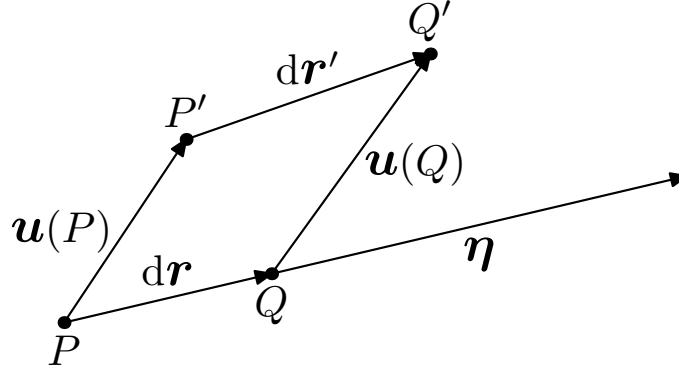


Figura 3.1: Deformación en el entorno de un punto de un cuerpo deformable

longitud y se conoce como la **deformación longitudinal unitaria** de un cuerpo en un punto  $P$  y en una dirección  $\boldsymbol{\eta}$ . Para poder definirlo, consideremos dos puntos  $P$  y  $Q$  infinitesimalmente próximos sobre un cuerpo deformable, y llamemos  $d\mathbf{r}$  al vector diferencial que va desde  $P$  a  $Q$ . Cuando el cuerpo se deforma, estos dos puntos pasan a ocupar las posiciones  $P'$  y  $Q'$ , y denominamos ahora  $d\mathbf{r}'$  al vector diferencial que los une. Es el cambio relativo de longitud de un elemento diferencial de línea con origen en el punto  $P$  y con dirección  $\boldsymbol{\eta}$ . Su definición matemática es

$$\varepsilon_{ex}(P, \boldsymbol{\eta}) := \frac{|d\mathbf{r}'| - |d\mathbf{r}|}{|d\mathbf{r}|} . \quad (3.2)$$

El segundo tipo de deformación posible es el cambio de ángulo. Para definirlo, consideremos ahora que sobre el cuerpo deformable existen dos vectores diferenciales  $d\mathbf{r}_1$  y  $d\mathbf{r}_2$  con origen en el punto  $P$ . Cuando el cuerpo se deforma, estos vectores se transforman en nuevos vectores diferenciales  $d\mathbf{r}'_1$  y  $d\mathbf{r}'_2$ . Cada uno de ellos puede haber cambiado su longitud debido a la deformación longitudinal, pero además puede haber cambiado el ángulo que forman entre sí. Llamando  $\boldsymbol{\eta}_1$  y  $\boldsymbol{\eta}_2$  a las direcciones de los vectores  $d\mathbf{r}_1$  y  $d\mathbf{r}_2$ , se define la **deformación angular**  $\gamma$  como

$$\gamma_{ex}(P, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) := \cos(\theta') - \cos(\theta) , \quad (3.3)$$

siendo  $\theta$  el ángulo (en radianes) que forman  $d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2$  y  $\theta'$  el ángulo que forman  $d\mathbf{r}'_1, d\mathbf{r}'_2$ .

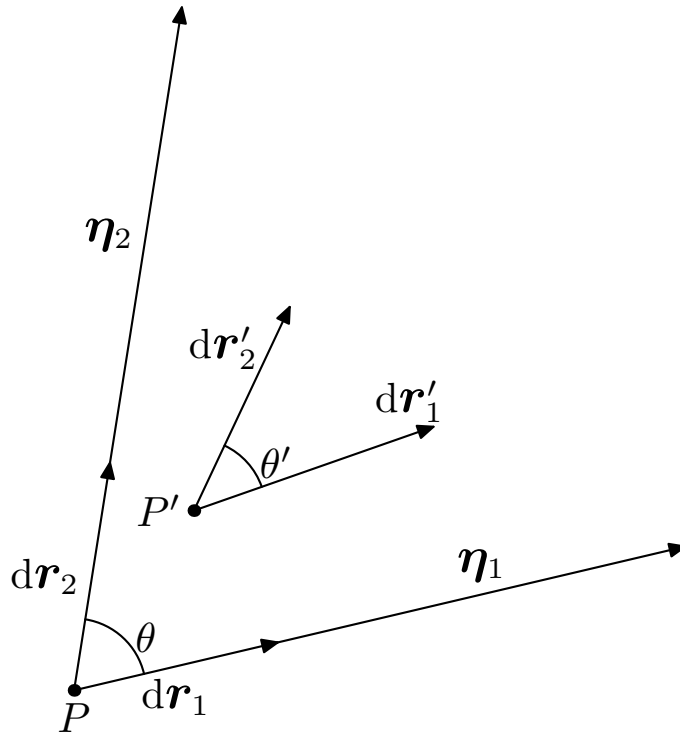


Figura 3.2: Deformación angular en el entorno de un punto de un cuerpo deformable

### Observaciones 2.1:

- i. Tanto las deformaciones longitudinales como las angulares no tienen dimensiones.
- ii. Ambas medidas son *locales*, es decir relativas a un punto, no a un cuerpo en su conjunto. Además, están relacionadas con direcciones. No tiene sentido hablar de la deformación longitudinal de un cuerpo ni de la deformación longitudinal de un punto. Tan sólo el concepto de la deformación longitudinal de un punto, en una dirección tiene sentido.
- iii. Las definiciones de deformación presentadas en esta sección son válidas incluso para deformaciones finitas y por ello se denominan “exactas”.  $\square$

### 3. Cálculo de deformaciones. El tensor de deformación infinitesimal

El problema que pretendemos resolver en esta sección es el siguiente: dado un campo de desplazamientos  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ¿cuáles son las deformaciones  $\varepsilon_{ex}$  y  $\gamma_{ex}$  en todos los puntos y todas las direcciones posibles? Este es el problema central de la cinemática de los cuerpos deformables.

Para *calcular* las deformaciones en cualquier punto será necesario determinar la forma *local* del campo de desplazamientos alrededor de dicho punto. Como siempre en teoría de campos, esta información la recoge el gradiente:

**Definición 3.2:** *Dado un campo de desplazamientos  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  se define el tensor gradiente de desplazamientos  $\nabla \mathbf{u}$  como aquel que verifica*

$$\mathbf{u}(P + d\mathbf{r}) = \mathbf{u}(P) + \nabla \mathbf{u}(P) d\mathbf{r} + \mathcal{O}(|d\mathbf{r}|^2). \quad (3.4)$$

*La expresión en coordenadas cartesianas de la matriz asociada al tensor  $\nabla \mathbf{u}$  es*

$$[\nabla \mathbf{u}(P)] = \begin{bmatrix} u_{x,x}(P) & u_{x,y}(P) & u_{x,z}(P) \\ u_{y,x}(P) & u_{y,y}(P) & u_{y,z}(P) \\ u_{z,x}(P) & u_{z,y}(P) & u_{z,z}(P) \end{bmatrix}.$$

El gradiente de desplazamientos es también adimensional y, como veremos después, nos servirá para calcular deformaciones. Para simplificar el cálculo de las mismas vamos a suponer a partir de ahora que el cuerpo al desplazarse se deforma muy poco. La definición precisa de qué significa esto es la siguiente:

**Definición 3.3:** *Se dice que un cuerpo experimenta una deformación pequeña si  $\|\nabla \mathbf{u}\| \ll 1$ . Esto ocurre si y sólo si todas las componentes de  $\nabla \mathbf{u}$  son mucho más pequeñas que 1.*

#### 3.1. El tensor de deformaciones infinitesimales

Cuando calculemos deformaciones comprobaremos que éstas sólo dependen de la parte simétrica de  $\nabla \mathbf{u}$  y a este objeto lo denominaremos el **tensor de deformación**, y juega un papel central en el modelo del sólido deformable.

**Definición 3.4:** Dado un campo de desplazamientos  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definimos la *deformación infinitesimal*  $\mathbf{D}$  como el campo de tensores simétricos

$$\mathbf{D}(P) := \nabla^S \mathbf{u}(P) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(P) + \nabla \mathbf{u}^T(P)) . \quad (3.5)$$

La parte de  $\nabla \mathbf{u}$  que no está asociada a la deformación infinitesimal  $\mathbf{D}$ , es decir la parte hemisimétrica del tensor, sí que está asociada al movimiento local y recibe la siguiente definición:

**Definición 3.5:** La parte hemisimétrica de  $\nabla \mathbf{u}(P)$  es el campo tensorial de *giro infinitesimal*

$$\mathbf{\Omega} := \nabla^a \mathbf{u}(P) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(P) - \nabla \mathbf{u}^T(P)) . \quad (3.6)$$

Como  $\mathbf{\Omega}$  es un tensor hemisimétrico tiene un vector axial asociado  $\boldsymbol{\omega}$ , llamado el vector de giro infinitesimal. Este campo vectorial satisface además

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u} . \quad (3.7)$$

La interpretación geométrica completa de estos campos tensoriales es la siguiente. Si en un punto  $P \in \Omega$  se escogen tres vectores diferenciales ortogonales  $d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2, d\mathbf{r}_3$ , cuando el cuerpo se deforme, estos tres vectores cambian de módulo y dirección transformándose en tres nuevos vectores infinitesimales  $d\mathbf{r}'_1, d\mathbf{r}'_2, d\mathbf{r}'_3$ . Para cada uno de ellos se puede escribir

$$d\mathbf{r}'_i = (\mathbf{I} + \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}) d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_i + \mathbf{D} d\mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}_i . \quad (3.8)$$

Así pues, los tensores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{\Omega}$  caracterizan, de forma completa, la transformación geométrica local, para cada entorno diferencial de los puntos del cuerpo deformable.

### 3.2. Cálculo de deformaciones longitudinales

Para obtener una expresión que nos permita obtener el valor de  $\varepsilon_{ex}$  en función de  $\mathbf{u}$  y sus gradientes, sustituimos el desarrollo de Taylor del campo de desplazamiento en la expresión (3.2). Sea  $\boldsymbol{\eta}$  el vector unitario en la dirección en la que queremos



calcular la deformación longitudinal. Entonces,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ex} &:= \frac{|\mathbf{dr}'|}{|\mathbf{dr}|} - 1 = \frac{|\mathbf{dr} + \mathbf{u}(Q) - \mathbf{u}(P)|}{|\mathbf{dr}|} - 1 = \frac{|\mathbf{dr} + \nabla\mathbf{u}(P)\mathbf{dr}|}{|\mathbf{dr}|} - 1 \\ &= |\boldsymbol{\eta} + \nabla\mathbf{u}(P)\boldsymbol{\eta}| - 1 = \sqrt{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} + 2\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla\mathbf{u}(P)\boldsymbol{\eta} + |\nabla\mathbf{u}(P)\boldsymbol{\eta}|^2} - 1.\end{aligned}\quad (3.9)$$

La expresión para la deformación longitudinal  $\varepsilon_{ex}$  es una función no lineal. Sin embargo, si las deformaciones son pequeñas podemos aproximar

$$\varepsilon_{ex} \approx \sqrt{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} + 2\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla\mathbf{u}(P)\boldsymbol{\eta}} - 1, \quad (3.10)$$

Y utilizando un desarrollo de Taylor para la función  $\sqrt{1+x}$  obtener finalmente

$$\varepsilon_{ex} \approx \boldsymbol{\eta} \cdot \nabla\mathbf{u}(P)\boldsymbol{\eta}. \quad (3.11)$$

Si  $\mathbf{A}$  es un tensor cualquiera, es inmediato comprobar que  $\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{A}^S\boldsymbol{\eta}$  y concluimos

**Definición 3.6:** Se define la *deformación longitudinal infinitesimal* en un punto  $P \in \Omega$  y una dirección cualquiera  $\boldsymbol{\eta}$  como el escalar

$$\varepsilon(P, \boldsymbol{\eta}) := \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{D}\boldsymbol{\eta}. \quad (3.12)$$

### Observaciones 3.7:

- i. La deformación longitudinal infinitesimal  $\varepsilon$  es una aproximación al la verdadera deformación longitudinal  $\varepsilon_{ex}$ , que es mucho más complicada de calcular. La aproximación es tanto más válida cuanto más pequeña sea la cantidad  $\|\nabla\mathbf{u}\|$ . Por tanto,  $\varepsilon$  sólo es exacta cuando la deformación sea infinitesimal. Para deformaciones finitas se puede dar el caso de que un cuerpo que se mueve rígidamente tenga deformación  $\varepsilon$  no nula.
- ii. La deformación  $\varepsilon$  es unitaria, y por tanto adimensional. □

Cuando un cuerpo se deforma, una curva material  $\mathcal{C}$  se deforma también pues cada uno de sus puntos se desplaza debido al movimiento del cuerpo. A menudo es interesante encontrar la longitud de la curva deformada a partir de la longitud inicial y de la deformación longitudinal unitaria en cada punto. Si la longitud de la curva sin deformar es  $L$ , cada punto de la curva lo denominamos  $P$  y el vector

tangente a la curva en  $P$  es  $\boldsymbol{\tau}$ , entonces

$$L' = \int_{\mathcal{C}} (1 + \varepsilon(P, \boldsymbol{\tau}(P))) \, dS . \quad (3.13)$$

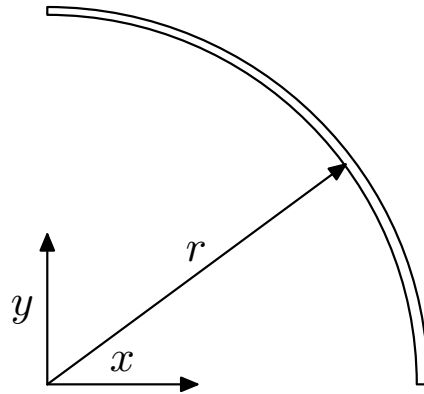
### Ejemplo 3.8:

Un cuarto de aro de radio  $r$  se deforma según el campo de desplazamientos

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \kappa \frac{x^2}{2} \mathbf{i} ,$$

siendo  $x$  un eje del sistema cartesiano situado en el centro del aro como se indica en la figura. Calcular:

- i) la deformación longitudinal unitaria  $\varepsilon$  en cualquier punto del aro y dirección circunferencial.
- ii) la longitud del aro deformado.



El vector tangente al aro en un punto genérico es  $\boldsymbol{\tau} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$ , siendo  $\theta \in [0, \pi/2]$  el ángulo que forma el vector de posición del punto con el eje  $x$ . La deformación longitudinal unitaria en dicho punto y dirección es:

$$\varepsilon(P, \boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} = \kappa x \sin^2 \theta .$$

Como  $x = r \cos \theta$  el valor de la deformación es simplemente  $\varepsilon(P, \boldsymbol{\tau}) = 2 \kappa r \sin^2 \theta \cos \theta$ . La longitud del trozo de aro deformado es:

$$L' = \int_{\mathcal{C}} dS' = \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1 + \varepsilon(\theta, \boldsymbol{\tau})) \, dS = \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1 + \kappa r \sin^2 \theta \cos \theta) \, dS = \frac{\pi}{2} r + \frac{\kappa}{3} r^2 .$$

△

### 3.3. Cálculo de deformaciones angulares

El cálculo de la deformación angular es, como en el caso anterior, complejo en general. Sin embargo, bajo algunas hipótesis simplificadores dicho cálculo se vuelve más sencillo.

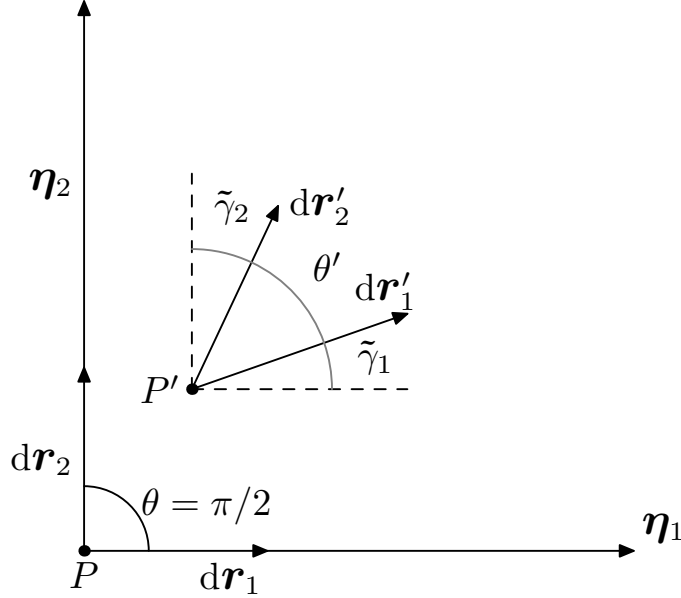


Figura 3.3: Interpretación geométrica de la deformación angular infinitesimal

Para empezar, únicamente consideraremos el caso de que  $\boldsymbol{\eta}_1$  y  $\boldsymbol{\eta}_2$  sean ortonormales. A partir entonces de la expresión (3.3) de la deformación angular se obtiene

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ex}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) &:= \cos(\theta') = \frac{d\mathbf{r}'_1 \cdot d\mathbf{r}'_2}{|d\mathbf{r}'_1| |d\mathbf{r}'_2|} = \frac{(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{r}_2}{|d\mathbf{r}_1| |d\mathbf{r}_2|} \frac{|d\mathbf{r}_1| |d\mathbf{r}_2|}{|d\mathbf{r}'_1| |d\mathbf{r}'_2|} \\
 &= (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \boldsymbol{\eta}_1 \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \boldsymbol{\eta}_2 \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)} \\
 &= (\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_2 + \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\eta}_2 + \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\eta}_2) (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) .
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Si las deformaciones son pequeñas, la expresión anterior se puede simplificar resultando

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ex}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) &\approx \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\eta}_2 \\
 &= \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_2 + \nabla^T \mathbf{u} \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_2 = 2\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{D} \boldsymbol{\eta}_2 .
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Basándose en la anterior aproximación se propone la siguiente

**Definición 3.9:** Se define la *deformación angular infinitesimal* en un punto  $P \in \Omega$  entre dos direcciones ortogonales  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$  como

$$\frac{\gamma}{2}(P, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) := \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{D}\boldsymbol{\eta}_2 . \quad (3.16)$$

Cuando  $\boldsymbol{\eta}_1$  y  $\boldsymbol{\eta}_2$  son ortonormales, la expresión (3.3) indica que  $\gamma_{ex}$  es el coseno del ángulo  $\theta'$  una vez que el cuerpo está deformado, o equivalentemente, el seno del ángulo  $\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2$  de la Figura 3.3. Cuando las deformaciones son pequeñas  $\text{sen}(\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2) \approx \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2$ . En conclusión, para pequeñas deformaciones, la medida  $\gamma$  de deformación angular es aproximadamente igual al ángulo que se cierra  $\theta$ . Esta aproximación es tanto mejor cuando menor sea la deformación y es la interpretación habitual en ingeniería de la medida de deformación  $\gamma$ .

### 3.4. Interpretación geométrica de las componentes del tensor de deformación

Las componentes de la matriz asociada a  $\mathbf{D}$  en una base ortogonal cualquiera  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  son  $D_{ij}$  con  $i, j = 1, 2, 3$ .

A partir de las definiciones de la deformación longitudinal y angular se comprueba que  $\varepsilon_{ii} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{D}\mathbf{e}_i$ , para cualquier  $i = 1, 2, 3$ . Es decir, la componente  $D_{ii}$  es la deformación longitudinal unitaria en dirección de  $\mathbf{e}_i$ . Para cada pareja  $i, j = 1, 2, 3$  con  $i \neq j$ , también se comprueba inmediatamente que  $\gamma_{ij}/2 = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{D}\mathbf{e}_j$ , es decir, que la componente  $D_{ij}$  de la matriz de deformaciones es la deformación angular que sufre el ángulo comprendido entre  $\mathbf{e}_i$  y  $\mathbf{e}_j$ . Por estas razones es habitual escribir la matriz  $[\mathbf{D}]$  como

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{21}}{2} & \varepsilon_{22} & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{31}}{2} & \frac{\gamma_{32}}{2} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} . \quad (3.17)$$

En el caso de que la base ortogonal sea la cartesiana, la matriz  $[\mathbf{D}]$  se escribe de la siguiente forma:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} . \quad (3.18)$$

Las componentes  $D_{ij}, i \neq j$  son las medidas de deformación que aparecen en el tensor  $\mathbf{D}$ . Sin embargo las deformaciones  $\gamma_{ij}$  no aparecen tal cual en  $\mathbf{D}$ , aunque su

uso es más habitual en ingeniería que las primeras. Se suele decir que  $\varepsilon_{ii}$  y  $\gamma_{ij}$  son medidas de deformación ingenieriles.

**Observaciones 3.10:**

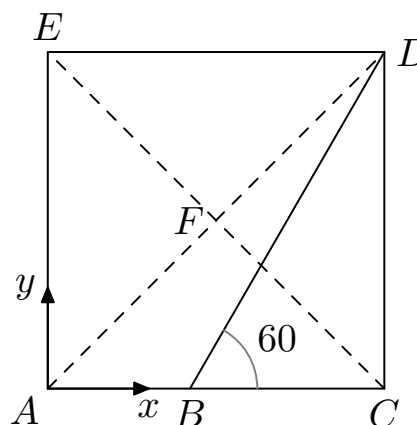
- i. Cuando  $\mathbf{D}$  no depende del punto de evaluación el estado de deformación del cuerpo es *homogéneo*.
- ii. Cuando un cuerpo experimenta un desplazamiento  $\mathbf{u}$  y el tensor  $\mathbf{D}$  es nulo en todo punto no significa que el cuerpo no haya sufrido deformación alguna. Esto sería rigurosamente cierto únicamente si la deformación es infinitesimal. Para ser precisos diremos que el campo de desplazamientos es *infinitesimalmente rígido*. Cuan rígido es realmente depende de la pequeñez del gradiente de deformaciones. Por ejemplo, si un cuerpo sufre una rotación finita alrededor de un punto fijo sabemos que éste no se ha deformado. Sin embargo se comprueba que el campo de deformaciones  $\mathbf{D}$  no se anula. En esta situación el gradiente  $\nabla\mathbf{u}$  no es pequeño así que  $\mathbf{D}$  no es una medida “fiable” de deformación.
- iii. Como las definiciones (3.5) y (3.16) son tensoriales, son válidas en cualquier sistema de referencia que se emplee, no necesariamente cartesiano.
- iv. Las expresiones de cambio de base para las componentes de un tensor descritas en el capítulo 1 se aplican directamente al tensor  $\mathbf{D}$ . □

**Ejemplo 3.11:**

El cuadrado de la figura sufre un estado de deformación homogéneo con  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ . Se sabe que, al deformarse,

- a) el lado  $AC$  aumenta su tamaño un 1%.
- b) el ángulo  $ACD$  se cierra  $2^\circ$ .
- c) el segmento  $BD$  se acorta un 3%.

Encontrar la expresión matricial del tensor de deformaciones en el sistema  $xy$  y, a partir de éste, calcular cuánto se abre el ángulo  $EFD$ .



A partir del dato del apartado a) se deduce que  $\varepsilon_x = 0.01$ . También, directamente a partir de b) se sigue que  $\gamma_{xy} = -\pi/90$ . La deformación

longitudinal unitaria en dirección de  $BD$  se calcula de la siguiente manera

$$-0.03 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.01 & -\frac{\pi}{180} & 0 \\ -\frac{\pi}{180} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

y, a partir de esta expresión, se obtiene  $\varepsilon_y = -2.3 \cdot 10^{-2}$ .

Por último, para encontrar la deformación angular del ángulo  $EFD$  se utiliza la fórmula

$$\frac{\gamma}{2}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) = \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{D}\boldsymbol{\eta}_2 \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}), \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{j} - \mathbf{i}).$$

Operando con los datos obtenidos anteriormente se calcula

$$\frac{\gamma}{2}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.01 & -\frac{\pi}{180} & 0 \\ -\frac{\pi}{180} & -2.3 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = -0.017.$$

Concluimos que  $\gamma = -3.3 \cdot 10^{-2}$ , es decir, que el ángulo  $EFD$  se abre  $3.3 \cdot 10^{-2}$  radianes, es decir,  $1.9^\circ$ . △

## 4. La deformación volumétrica

Otra característica propia de los cuerpos deformables es que su volumen cambia cuando éstos se someten a fuerzas y/o acciones exteriores. Para cuantificar este efecto se propone también una medida local de deformación volumétrica. En un cuerpo deformable, cada diferencial de volumen  $dV$  se transforma debido a la deformación en un nuevo diferencial  $dV'$ . Se define **la deformación volumétrica relativa** como el cambio relativo local de volumen:

$$\theta_{ex}(P) = \frac{dV' - dV}{dV}. \quad (3.19)$$

El cálculo de la deformación volumétrica exacta  $\theta_{ex}$  es complicada, al igual que ocurría con la deformación longitudinal y la angular. También como en estos casos el cálculo se puede simplificar cuando las deformaciones son infinitesimales. Para encontrar la aproximación necesaria se consideran tres vectores diferenciales

$d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2, d\mathbf{r}_3$  sobre un punto  $P \in \Omega$ , no coplanarios. Entonces,

$$\begin{aligned}
\theta_{ex}(P) &= \frac{dV'}{dV} - 1 = \frac{[d\mathbf{r}'_1 \ d\mathbf{r}'_2 \ d\mathbf{r}'_3]}{[d\mathbf{r}_1 \ d\mathbf{r}_2 \ d\mathbf{r}_3]} - 1 \\
&= \frac{[(\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{r}_1 \ (\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{r}_2 \ (\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{r}_3]}{[d\mathbf{r}_1 \ d\mathbf{r}_2 \ d\mathbf{r}_3]} - 1 \\
&= \frac{\det(\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}) [d\mathbf{r}_1 \ d\mathbf{r}_2 \ d\mathbf{r}_3]}{[d\mathbf{r}_1 \ d\mathbf{r}_2 \ d\mathbf{r}_3]} - 1 \\
&= \det(\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}) - 1 .
\end{aligned} \tag{3.20}$$

La función determinante es no lineal y se puede aproximar  $\det(\mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}) \approx 1 + \operatorname{div} \mathbf{u}$  cuando la deformación es pequeña. Por lo tanto concluimos que

$$\theta_{ex}(P) \approx \operatorname{div} \mathbf{u}(P) . \tag{3.21}$$

Así pues la divergencia del desplazamiento es una aproximación al cambio relativo de volumen y se define

**Definición 4.12:** *La deformación volumétrica infinitesimal en un punto  $P \in \Omega$  es*

$$\theta(P) := \operatorname{div} \mathbf{u}(P) .$$

*Además, se puede demostrar que  $\operatorname{tr}[\mathbf{D}] = \operatorname{div} \mathbf{u}$ .*

Como en el caso del resto de deformaciones infinitesimales, la cantidad  $\theta$  es una aproximación de la verdadera deformación infinitesimal  $\theta_{ex}$ , cuya validez es tanto mayor cuanto más pequeña sea la deformación.

Empleando el concepto de deformación volumétrica se puede descomponer el tensor  $\mathbf{D}$  en dos contribuciones aditivas. La primera parte, la volumétrica, es un tensor de deformación que tiene deformación volumétrica igual a  $\theta$ . La segunda parte, llamada desviadora, tiene traza nula y por lo tanto es una deformación responsable de cambio de forma, pero no de volumen:

$$\mathbf{D} = \frac{\theta}{3} \mathbf{I} + \mathbf{e} , \tag{3.22}$$

y calculando  $\mathbf{e} = \mathbf{D} - \frac{\theta}{3} \mathbf{I}$ .

Para calcular el cambio de volumen que experimenta un cuerpo entero o una región el mismo, basta con integrar la deformación volumétrica en dicho dominio.

Así pues,

$$\Delta V = \int_{\mathcal{R}} \theta(P) dV . \quad (3.23)$$

Sólo si la deformación volumétrica es uniforme se puede escribir  $\Delta V = \theta \cdot V$ .

**Ejemplo 4.13:** Un cubo deformable de lado  $L$  experimenta un campo de desplazamientos

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \operatorname{sen}\left(\frac{z}{L}\right) \frac{y^2}{L} \mathbf{i} + \frac{x^3}{L^2} \mathbf{j} + \frac{z^3}{3L^2} \mathbf{k} , \quad (3.24)$$

referido a un sistema de coordenadas cartesiano con origen en el centro del cubo y ejes coordenados paralelos a las aristas. Calcular el incremento de volumen del cubo en la deformación.

La deformación volumétrica relativa es

$$\theta(x, y, z) = \operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) = \frac{z^2}{L^2} , \quad (3.25)$$

así que el incremento total de volumen del cubo será:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_{x=-L/2}^{L/2} \int_{y=-L/2}^{L/2} \int_{z=-L/2}^{L/2} \theta(x, y, z) dV \\ &= \int_{x=-L/2}^{L/2} \int_{y=-L/2}^{L/2} \int_{z=-L/2}^{L/2} \frac{z^2}{L^3} dx dy dz \\ &= \frac{L^3}{12} . \end{aligned} \quad (3.26)$$

△

## 5. Deformaciones principales y direcciones principales de deformación

El tensor de deformación infinitesimal  $\mathbf{D}$  es simétrico y por tanto posee tres autovalores reales  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$  denominados las *deformaciones principales*. Sus autovectores asociados  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$  forman un base ortonormal y se conocen como *base principal de deformación*.



### Observaciones 5.14:

- i. Estos valores y vectores propios dependen de cada punto del cuerpo a menos que la deformación sea homogénea, en cuyo caso serán los mismos.
- ii. La matriz asociada al tensor de deformaciones en la base principal es diagonal, y las deformaciones principales son las componentes de la diagonal.
- iii. La deformación longitudinal unitaria en la dirección principal  $\mathbf{w}_i$  es:

$$\varepsilon(P, \mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{D}(P)\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i \cdot \varepsilon_i \mathbf{w}_i = \varepsilon_i . \quad (3.27)$$

- iv. La deformación angular que sufre el ángulo comprendido entre las direcciones principales  $i, j$  con  $i \neq j$  es:

$$\frac{\gamma}{2}(P, \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) = \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{D}\mathbf{w}_j = \mathbf{w}_i \cdot \varepsilon_j \mathbf{w}_j = 0 , \quad (3.28)$$

con lo que se demuestra que en ángulo entre vectores de la base principal no cambia con la deformación. Cuando el cuerpo se deforma, la terna principal se transforma en otra terna de vectores ortogonales.

## 6. Galgas extensométricas

Las galgas extensométricas son unos sensores que se emplean para medir las deformaciones longitudinales unitarias en el contorno de los cuerpos deformables. El mecanismo de medida es resistivo: las galgas son unas resistencias muy pequeñas que se adhieren a la superficie del cuerpo con un pegamento. Cuando el cuerpo se deforma, la galga pegada se deforma solidariamente al cuerpo y ésto hace que varíe su resistencia. Un ohmímetro calibrado relaciona el cambio de resistencia con la deformación experimentada en el punto donde la galga estaba pegada.

Por supuesto, para que las galgas proporcionen una medida precisa, éstas no pueden ser grandes y el pegado ha de ser muy bueno. Hay empresas especializadas que venden galgas extensométricas de distinto tamaño y calidad, todas ellas calibradas.

Debido al mecanismo de medida, las galgas sólo pueden medir deformaciones longitudinales y sólo en la superficie de los cuerpos. Dada una dirección cualquiera  $\boldsymbol{\eta}$  tangente a la superficie del cuerpo, la deformación longitudinal unitaria que mide una galga orientada según una dirección es:

$$\varepsilon = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{D}\boldsymbol{\eta} . \quad (3.29)$$

Mediante la colocación de varias galgas superpuestas sobre un mismo punto (formando “rosetas”) se pueden medir también deformaciones angulares. Para demostrar esto supongamos que escogemos un sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y, z)$  en un punto de la superficie, siendo el eje  $z$  normal a la superficie. Si se pegan tres galgas sobre el punto, formando, respectivamente, ángulos  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  con el eje  $x$ , tenemos que cada una de ellas mide una deformación longitudinal unitaria distinta:

$$\varepsilon_\alpha = \boldsymbol{\eta}_\alpha \cdot \mathbf{D}\boldsymbol{\eta}_\alpha, \quad \varepsilon_\beta = \boldsymbol{\eta}_\beta \cdot \mathbf{D}\boldsymbol{\eta}_\beta, \quad \varepsilon_\gamma = \boldsymbol{\eta}_\gamma \cdot \mathbf{D}\boldsymbol{\eta}_\gamma, \quad (3.30)$$

siendo  $\boldsymbol{\eta}_\alpha, \boldsymbol{\eta}_\beta$  y  $\boldsymbol{\eta}_\gamma$  los vectores unitarios en dirección de las galgas. Expresando el tensor de deformaciones  $\mathbf{D}$  y los vectores de dirección de las galgas en el sistema escogido  $(x, y, z)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha, \\ \varepsilon_\beta &= \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} = \varepsilon_x \cos^2 \beta + \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \varepsilon_y \sin^2 \beta, \\ \varepsilon_\gamma &= \begin{Bmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \\ 0 \end{Bmatrix} = \varepsilon_x \cos^2 \gamma + \gamma_{xy} \sin \gamma \cos \gamma + \varepsilon_y \sin^2 \gamma. \end{aligned} \quad (3.31)$$

En las ecuaciones anteriores hay tres incógnitas  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ , tres datos geométricos  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  y tres medidas experimentales  $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$  y  $\varepsilon_\gamma$ . A partir de los datos podemos encontrar las deformaciones longitudinales unitarias en las direcciones  $x$  e  $y$  y la deformación angular.

## 7. El diagrama de Mohr de deformaciones

Como se indicó en el capítulo 2, el diagrama de Mohr se puede emplear para representar gráficamente algunas de las propiedades de cualquier tensor simétrico y, en particular, el tensor de deformaciones. El diagrama de Mohr de deformaciones tiene pues un aspecto idéntico al de tensiones, si se reinterpreta, para cada dirección  $\boldsymbol{\eta}$ , la componente sobre el eje de abscisas como la deformación longitudinal unitaria  $\varepsilon(\boldsymbol{\eta})$  y aquella sobre el eje de ordenadas como la máxima deformación angular  $\gamma/2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^\perp)$  de todos los ángulos rectos con un lado igual a  $\boldsymbol{\eta}$ .

Todas las propiedades geométricas del diagrama de Mohr que se enunciaron para el tensor de tensiones tienen su correspondencia en el tensor de deformaciones. Por ejemplo, el radio del círculo de Mohr mayor es la mitad de la máxima deformación angular que se da entre todos las parejas de vectores ortonormales que coinciden en el punto. En cualquier caso, la utilidad práctica del diagrama de Mohr de las deformaciones es mucho menor que en caso de las tensiones.

## 8. Problemas

**3.1** Un sólido se deforma y el desplazamiento de un punto cualquiera  $(x, y, z)$  del mismo en un sistema de coordenadas  $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  viene dado por la expresión:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = 3 \cdot 10^{-3} e^{\frac{x+y}{5}} \mathbf{i} + 2 \cdot 10^{-3} \operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right) \mathbf{k} \quad (\text{m}) .$$

Se pide:

- 1) Hallar la representación matricial del tensor de deformaciones infinitesimales  $\mathbf{D}$  en el sistema de referencia  $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .
- 2) Hallar la matriz de giro infinitesimal  $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}$  en un punto cualquiera y su vector axial asociado  $\boldsymbol{\omega}$ . Comprobar que  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u}$ .
- 3) Considérese un vector diferencial de módulo  $dS$  sobre el punto  $(x, y, z) = (1, 2, -1)$  m con dirección  $(0, \sqrt{3}/2, 1/2)$ . Calcular la expresión del vector después de la deformación, indicando su punto de aplicación, dirección y módulo.
- 4) Hallar las deformaciones principales en el punto  $O$  y dibujar el diagrama de Mohr correspondiente al estado de deformación en dicho punto.
- 5) Calcular la deformación volumétrica en  $O$ . Comprobar que es un invariante y que por tanto

$$\varepsilon_{xx}(O) + \varepsilon_{yy}(O) + \varepsilon_{zz}(O) = \varepsilon_1(O) + \varepsilon_2(O) + \varepsilon_3(O) = \operatorname{div} \mathbf{u} .$$

**3.2** Una barra recta de longitud  $L$ , alineada con el eje  $x$ , sufre una deformación que se describe con un campo de desplazamiento

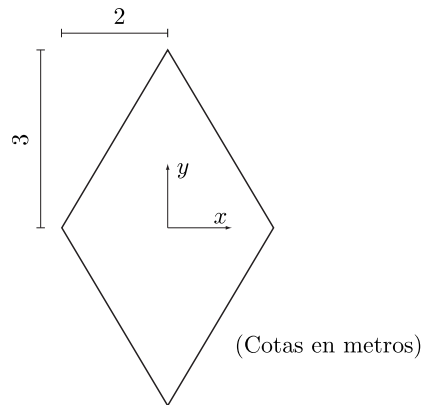
$$\mathbf{u}(x, y, z) = \left(100L \operatorname{sen} \frac{x}{100L} - x\right) \mathbf{i} + 100L \left(1 - \cos \frac{x}{100L}\right) \mathbf{j} .$$

Calcular la longitud de la barra deformada.

**3.3** Un sólido de sección romboidal tiene una profundidad de 1 m. El campo de desplazamientos del cuerpo es:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = -\left(\frac{\pi x}{400} + \frac{y}{150}\right)\mathbf{j} + \frac{3x}{100}\mathbf{k}.$$

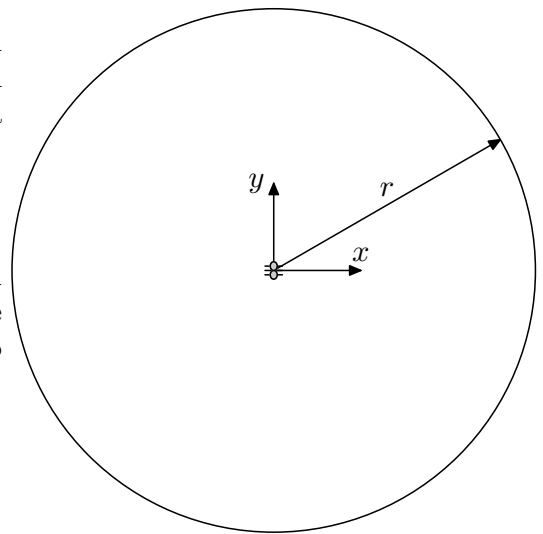
- i) Calcular la expresión matricial del tensor de deformaciones infinitesimales en el sistema de referencia de la figura. Comprobar que es homogéneo.
- ii) Dibujar la sección  $z = 0$  deformada empleando una escala adecuada para que se puedan apreciar las deformaciones.
- iii) Calcular las deformaciones longitudinales unitarias en un punto genérico en las direcciones  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ . Comprobar que éstas son independientes de las coordenadas del punto.
- iv) Calcular la deformación que sufre el ángulo formado por los vectores  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  en el origen de coordenadas.
- v) Interpretar gráficamente los resultados de iii) y iv)
- vi) Calcular el volumen del cuerpo deformado.
- vii) Calcular la longitud de los lados deformados.



**3.4** Una hormiga se encuentra en el centro de un disco deformable de radio  $r = 2\text{m}$ , donde se define un sistema de coordenadas cartesianas. El disco se deforma y sus puntos experimentan un desplazamiento

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (3x + 4y) \cdot 10^{-2}\mathbf{i} + (2x - 3y) \cdot 10^{-2}\mathbf{j} .$$

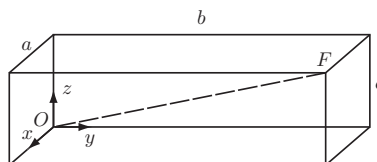
Sabiendo que la hormiga se mueve a una velocidad constante de  $2\text{ m/min}$ , ¿cuál es el tiempo mínimo que la hormiga emplearía en alcanzar el borde del disco deformado? ¿qué dirección ha de seguir para ello?



**3.5** La deformación de un paralelepípedo sólido de lados  $a, b, c$  metros está descrita por el vector de desplazamientos:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (3x + 2y) \cdot 10^{-3}\mathbf{i} + (6x + 2z) \cdot 10^{-3}\mathbf{k} \text{ (m)}$$

referido a un sistema de coordenadas cartesiano  $(O, x, y, z)$ .



Se pide

- 1) Determina la expresión matricial de los tensores de deformaciones infinitesimales y de giro infinitesimal en el sistema de referencia  $(O, x, y, z)$ .
- 2) Calcula el volumen del paralelepípedo deformado.
- 3) Calcula la longitud de la diagonal  $\overline{OF}$  del paralelepípedo deformado.

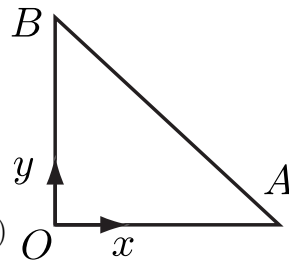
**3.6** Un cuerpo experimenta el desplazamiento correspondiente a una rotación de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $z$  cartesiano. Por ello, un punto de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  pasa, después de la deformación, a ocupar la posición

$$(x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta, -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta, z) .$$

Calcula el vector de desplazamiento y la expresión matricial del tensor de deformaciones en coordenadas cartesianas. Comprueba que la deformación no es nula a pesar de que el movimiento que el cuerpo experimenta es de sólido rígido. Explica razonadamente cómo es esto posible.

**3.7** El triángulo isósceles de la figura corresponde a la sección  $z = 0$  de un prisma triangular de altura 2 m que sufre una deformación

$$\mathbf{u}(x, y, z) = [(2x + y + K e^y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (x + y + z)\mathbf{k}] \cdot 10^{-3} \text{ (m)}$$



siendo  $K$  una constante sin dimensiones.

- 1) Calcula el ángulo formado por los lados  $OA$  y  $OB$  después de la deformación.
- 2) Calcula la longitud del lado  $AB$  también después de la deformación (en este último caso tomar  $K = 0$  y suponer que la longitud de los catetos es de 1 m).
- 3) Calcula el volumen del prisma deformado suponiendo también que  $K = 0$ .

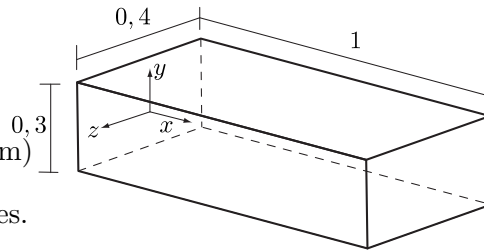
**3.8** El paralelepípedo de la figura tiene un campo de desplazamientos

$$\mathbf{u}(x, y, z) = A(x+y)\mathbf{i} + B(y+z)\mathbf{j} + C(z+x)\mathbf{k} \text{ (m)}$$

siendo  $A, B$  y  $C$  tres constantes adimensionales.

Encontrar su valor sabiendo que:

- i) Con la deformación, el paralelepípedo aumenta su tamaño un 2%.
- ii) La diagonal de la cara  $x = 0$  que divide en dos el ángulo entre los ejes  $y, z$  reduce su longitud un 1,5%.
- iii) El ángulo formado por los vectores  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  en el origen de coordenadas forman  $89^\circ$  después de la deformación.



**3.9** Una esfera de radio  $r = 2$  m sufre una deformación al deformarse según un campo de desplazamientos  $\mathbf{u}(x, y, z) = (5x + 2y) \cdot 10^{-2}\mathbf{i} + (2x + 3y) \cdot 10^{-2}\mathbf{j} + 4 \cdot 10^{-2}z\mathbf{k}$ .

- 1) Demostrar que la deformación es homogénea.
- 2) Calcular el volumen de la esfera deformada.
- 3) Calcular la longitud de los radios más largos y más cortos después de la deformación.

**3.10** Un cubo de lado  $l = 2$  m está colocado en el centro de un sistema de coordenadas cartesiano con sus aristas paralelas a los ejes de coordenadas. Si el desplazamiento del cubo es:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (6x^3 + z) \cdot 10^{-2}\mathbf{i} + (7y + x) \cdot 10^{-2}\mathbf{j} + (4z + x^2) \cdot 10^{-2}\mathbf{k} .$$

- 1) Calcula el volumen del cubo deformado.
- 2) Calcula la longitud de la arista que conecta los puntos  $(-1, 1, 1)$  m y  $(1, 1, 1)$ m, una vez que el cuerpo se deforma.





# Capítulo 4

## Elasticidad y termoelasticidad lineal

---

En los capítulos 2 y 3 se han estudiado las dos características fundamentales de los cuerpos deformables, a saber, la existencia de fuerzas internas que garantizan su equilibrio y su deformabilidad. En este capítulo se estudia cómo no se trata de dos cuestiones aisladas sino que, al contrario, son causa y efecto de una misma realidad.

La relación entre tensión y deformación es el problema fundamental de la mecánica de cuerpos deformables, y el más complejo. Debido a esto último nos concentramos en este capítulo en dos casos muy sencillos, el de la elasticidad y la termoelasticidad lineal. A pesar de su sencillez estos dos modelos constitutivos permiten resolver una gran cantidad de problemas de ingeniería. Quedan para otros cursos más avanzados el estudio de la viscoelasticidad, la plasticidad, etc

## 1. El concepto de elasticidad

El término “elasticidad” se emplea coloquialmente y posee el siguiente significado preciso en el contexto de la mecánica

**Definición 1.1:** *Se dice que un punto material  $P$  se comporta **elásticamente** cuando el tensor de tensión  $\mathbf{T}(P)$  es únicamente función del valor en ese instante de la deformación  $\mathbf{D}(P)$ . Supondremos por simplificar que si la deformación se anula, también lo hace la tensión.*

Bajo esta definición los efectos de la historia y de la velocidad de deformación son irrelevantes, fenómenos por otra parte fundamentales para el estudio de la plasticidad y la viscoelasticidad.

### Observaciones 1.2:

- i. No existe ningún material elástico en la naturaleza. Lo que sí existen son materiales que se comportan elásticamente en un rango de deformación, normalmente pequeño. Este rango es el habitual para el funcionamiento de las máquinas y las estructuras por lo que basta para muchos cálculos en ingeniería mecánica.
- ii. En un ciclo de deformación la tensión inicial y final en un punto material ha de ser la misma.
- iii. La “elasticidad” no está asociada a la linealidad de la respuesta. Existen materiales que se comportan elásticamente pero de forma no lineal.
- iv. La definición del concepto de elasticidad es local por lo que permite considerar cuerpos en los que una región se comporte linealmente y otra no.  $\square$

## 2. El principio de superposición

Combinando las ecuaciones del equilibrio, la definición de la deformación y una relación constitutiva de la forma  $\mathbf{T} = f(\mathbf{D})$  se define de forma completa un problema de contorno que, bajo ciertas hipótesis en el modelo constitutivo, se puede demostrar que tiene solución y única además. Sin embargo, que esta solución exista no significa que se pueda calcular en la práctica pues el sistema resultante de ecuaciones en derivadas parciales es bastante complejo.

Para facilitar la resolución de problemas elásticos se adopta muy a menudo una hipótesis de cálculo que de hecho se verifica de forma muy precisa cuando

las deformaciones son pequeñas. Para describir esta hipótesis consideramos que la sollicitación sobre un cuerpo se compone de las fuerzas de volumen sobre  $\Omega$  y de superficie sobre  $\Gamma_t$  y esto lo indicamos con el par  $(\mathbf{f}_v, \mathbf{f}_s)$ . Esta sollicitación produce en el cuerpo una respuesta que consta de un desplazamiento, una deformación y una tensión que escribimos como una terna  $(\mathbf{u}, \mathbf{D}, \mathbf{T})$ . Los dos primeros campos están relacionados por la definición de la deformación, los dos últimos por la ley constitutiva y la tensión además ha de estar en equilibrio con la sollicitación.

**Definición 2.3:** *Se dice que un cuerpo satisface el **principio de superposición** cuando la respuesta a una sollicitación combinada  $(\mathbf{f}_v^1 + \mathbf{f}_v^2, \mathbf{f}_s^1 + \mathbf{f}_s^2)$  es la suma de las respuestas  $(\mathbf{u}^1, \mathbf{D}^1, \mathbf{T}^1)$  y  $(\mathbf{u}^2, \mathbf{D}^2, \mathbf{T}^2)$ , siendo cada una de estas la debida a la acción independiente de la primera y segunda sollicitación, respectivamente.*

Como las ecuaciones del equilibrio son lineales y también lo es la relación entre el desplazamiento y la deformación, el principio de superposición es equivalente a suponer que *el modelo constitutivo es también lineal*. La relación  $\mathbf{T} = f(\mathbf{D})$  puede ser por tanto descrita por una función  $f$  tensorial de variable tensorial y lineal. Ese tipo de funciones se conocen como tensores de cuarto orden.

En general, la definición de una relación lineal entre  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{T}$ , o dicho de otra manera un tensor de cuarto orden entre tensores simétricos, requiere la definición de  $6 \times 6 = 36$  constantes elásticas. Sin embargo en este curso sólo estudiaremos materiales isótropos y para este caso sólo son necesarias dos constantes independientes.

El principio de superposición se supondrá siempre cierto a partir de ahora, como la hipótesis de pequeñas deformaciones aunque hay que subrayar que no es rigurosamente cierto.

### 3. Las constantes elásticas de un material isótropo

Cuando se estudia la respuesta elástica de un material isótropo bastan dos constantes para definirla completamente. Para identificar estas dos propiedades, puesto que son locales, se establecen ensayos mecánicos muy sencillos en los que los estados de tensión y deformación sean homogéneos, a partir de los cuales se pueden sacar conclusiones de la respuesta puntual.

Mencionamos otra vez que existen infinitas parejas de constantes que definen de forma unívoca el comportamiento elástico de un material isótropo. Escogemos el

módulo de Young y el coeficiente de Poisson, definidos a continuación, por ser las dos constantes que tienen un significado físico más claro.

Para describir matemáticamente la respuesta elástica de un material isótropo se estudia el estado de tensión homogénea más sencillo que existe, esto es, el de tracción uniaxial. Para ello se toma una barra de material sujeta por un extremo y se somete a una fuerza de tracción por el extremo libre. Ignorando los efectos cercanos a la sustentación, el estado de tensión y deformación de todos los puntos de esta barra es

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

siendo  $(x, y, z)$  un sistema de coordenadas con el eje  $x$  paralelo al eje del cilindro. En la barra se observa que la dimensión axial aumenta, que las dimensiones transversales disminuyen y que los ángulos relativos no cambian.

### 3.1. El módulo de Young

El módulo de Young  $E$  es la pendiente de la curva  $(\sigma, \varepsilon)$  en un ensayo uniaxial de tracción/compresión. Si denominamos  $x$  el eje paralelo a la dirección del ensayo, se verifica

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}. \quad (4.2)$$

Las dimensiones de  $E$  son  $F/L^2$ . El acero, por ejemplo, posee un módulo de Young de valor  $E_{acero} = 210$  GPa.

### 3.2. El coeficiente de Poisson

El coeficiente de Poisson  $\nu$  relaciona la deformación axial con el acortamiento transversal en un ensayo uniaxial de tracción. Se define este escalar mediante la relación

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x},$$

siendo válida la segunda igualdad debido a la hipótesis de isotropía. Siendo un cociente entre deformaciones, el coeficiente de Poisson es adimensional. En el acero, por ejemplo, este coeficiente tiene el valor  $\nu_{acero} = 0.3$ .

## 4. La ley de Hooke generalizada

En la sección anterior se han definido el módulo de Young y el coeficiente de Poisson, como constantes elásticas que describen completamente la deformación en un ensayo de tracción uniaxial (o compresión). A continuación demostramos que a partir de estos datos podemos encontrar la relación tensión-deformación en un punto sometido a un estado tensional arbitrario, encontrando la llamada *ley de Hooke generalizada*, pues extiende al continuo la relación elástica de los resortes.

Para obtener dicha relación partimos primero de la siguiente observación: el estado tensional más complejo que puede ejercerse sobre un diferencial de volumen es un estado triaxial de tracción/compresión. Efectivamente, cualquier estado tensional puede expresarse, en la base principal de tensión, como un estado triaxial de tracción/compresión. En dicho estado las tres tensiones normales se denominan  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  y coinciden con las tensiones principales.

Aceptando como válido el principio de superposición, estudiamos la respuesta al estado triaxial de tensión superponiendo tres estados de tracción/compresión uniaxial. Comenzando por la tracción/compresión sobre un plano perpendicular a la dirección principal primera, el estado de tensión y deformación correspondiente es:

$$[\mathbf{T}^{(1)}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}^{(1)}] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_1}{E} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Estudiando a continuación un estado de tracción/compresión uniaxial en la dirección principal de tensión segunda obtenemos un nuevo estado de deformación

$$[\mathbf{T}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}^{(2)}] = \begin{bmatrix} -\nu \frac{\sigma_2}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_2}{E} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Finalmente, considerando el tercer estado de tensión posible se obtiene que la tensión y deformación son

$$[\mathbf{T}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}^{(3)}] = \begin{bmatrix} -\nu \frac{\sigma_3}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_3}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_3}{E} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Por el principio de superposición, la deformación debida a un estado tensional

$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(1)} + \mathbf{T}^{(2)} + \mathbf{T}^{(3)}$  es la suma  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{D}^{(2)} + \mathbf{D}^{(3)}$ , o en forma de matriz:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_3}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

La primera conclusión que se obtiene de (4.6) es que, en un material elástico isótropo, las bases principales de tensión y deformación coinciden. Sobre todo, esta expresión indica la relación más general posible entre tensión y deformación de un material de estas características cuando estas dos cantidades se expresan en componentes de la base principal. Para hallar la expresión intrínseca, válida para cualquier sistema de coordenadas, no necesariamente cartesiano reformulamos la anterior expresión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}] &= \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1+\nu}{E} [\mathbf{T}] - \frac{\nu}{E} \text{tr}[\mathbf{T}] [\mathbf{I}]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Esta última expresión depende sólo de operadores intrínsecos, pues en ningún lugar se hace referencia a componentes o sistemas de coordenadas, así que se puede formular de manera completamente general la siguiente ley de Hooke generalizada:

$$\mathbf{D} = \frac{1+\nu}{E} \mathbf{T} - \frac{\nu}{E} \text{tr}[\mathbf{T}] \mathbf{I}. \quad (4.8)$$

Para la resolución de problemas resulta útil recoger la expresión en componentes cartesianas de (4.8). Definimos para ello el **módulo de cortante**  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  y escribimos

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z), & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_z + \sigma_x), & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y), & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

En estas expresiones se puede leer un resultado adicional importante: en los materiales elásticos isótropos las tensiones normales sólo producen deformaciones longitudinales (en todas las tres direcciones debido al efecto Poisson) y las tensiones cortantes sólo produce deformaciones angulares (cada tensión cortante produce una deformación angular desacoplada del resto).

## 5. Las ecuaciones de Lamé

La ecuación (4.8) permite calcular la deformación  $\mathbf{D}$  en función de la tensión  $\mathbf{T}$  y en esta sección invertimos esta expresión para encontrar una fórmula de la tensión en función de la deformación. Para ello, comenzamos aplicando el operador  $\text{tr}[\ ]$  a ambos lados de la igualdad (4.8) resultando en

$$\begin{aligned}\text{tr}[\mathbf{D}] &= \frac{1+\nu}{E}\text{tr}[\mathbf{T}] - \frac{\nu}{E}\text{tr}[\mathbf{T}]\text{tr}[\mathbf{I}] \\ &= \left(\frac{1+\nu}{E} - 3\frac{\nu}{E}\right)\text{tr}[\mathbf{T}] \\ &= \frac{1-2\nu}{E}\text{tr}[\mathbf{T}].\end{aligned}\tag{4.10}$$

En el capítulo 3 se escogió el símbolo  $\theta$  para indicar la traza de la deformación, así pues

$$\text{tr}[\mathbf{T}] = \frac{E}{1-2\nu}\theta.\tag{4.11}$$

Sustituyendo este último resultado en la ecuación (4.8) obtenemos

$$\mathbf{D} = \frac{1+\nu}{E}\mathbf{T} - \frac{\nu}{E}\frac{E}{1-2\nu}\theta\mathbf{I}.\tag{4.12}$$

Despejando el tensor de tensión de esta expresión se obtiene

$$\mathbf{T} = \frac{E}{1+\nu}\mathbf{D} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\theta\mathbf{I}.\tag{4.13}$$

Para poder escribir esta expresión de forma más compacta definimos *el primer y segundo coeficiente de Lamé*

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.\tag{4.14}$$

Ambos coeficientes de Lamé tienen dimensiones de  $F/L^2$ , como el módulo de Young, puesto que son rigideces. Como el segundo coeficiente de Lamé es igual al módulo de cortante  $G$  escribimos la expresión (4.13) finalmente

$$\mathbf{T} = 2G\mathbf{D} + \lambda\text{tr}[\mathbf{D}]\mathbf{I}.\tag{4.15}$$

Esta última expresión se conoce como la ecuación de Lamé y permite obtener la tensión a partir de la deformación. Como se trata de una ecuación intrínseca es

válida en cualquier sistema de coordenadas. En particular, si se expresan todos los tensores en coordenadas cartesianas se obtiene

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G \varepsilon_x + \lambda \theta, & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \\
\sigma_y &= 2G \varepsilon_y + \lambda \theta, & \tau_{xz} &= G \gamma_{xz}, \\
\sigma_z &= 2G \varepsilon_z + \lambda \theta, & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}, \\
\theta &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.
\end{aligned}
\tag{4.16}$$

## 6. Deformaciones y tensiones proporcionales

En un ensayo uniaxial, una tensión de tracción provoca una deformación en dirección de las tensiones aplicadas. En general esto no es así y un punto sometido a un estado tensional  $\mathbf{T}$  experimenta una deformación  $\mathbf{D}$  que no es proporcional a la tensión, es decir,  $\mathbf{D} \neq \omega \mathbf{T}$ , para ningún escalar  $\omega$ . Por ejemplo, un punto sometido a tracción uniaxial sufre deformaciones en las direcciones perpendiculares a la tracción aplicada debidas al “efecto Poisson”. Sin embargo, un punto sometido a un estado de tensión de cortante puro sólo experimenta deformación angular y se comprueba fácilmente que  $\mathbf{D} = (2G)^{-1} \mathbf{T}$ . Pretendemos estudiar a continuación cuántos casos existen de solicitaciones que provocan estados de deformación proporcionales a éstos.

**Teorema 6.4:** *En un sólido elástico isótropo sólo los estados de tensión esféricos y los puramente desviadores causan estados de deformación proporcionales a ellos mismos. En el primer caso, cuando  $\mathbf{T}$  es esférico,*

$$\mathbf{D} = (3\kappa)^{-1} \mathbf{T}, \tag{4.17}$$

*y en el segundo, cuando  $\mathbf{T}$  es desviador,*

$$\mathbf{D} = (2\mu)^{-1} \mathbf{T}. \tag{4.18}$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que en para un estado tensional  $\mathbf{T}$ , la deformación provocada en un punto es tal que  $\mathbf{D} = \omega \mathbf{T}$ . Entonces, por las ecuaciones de Lamé,

$$\mathbf{T} = 2\mu\omega \mathbf{T} + \lambda\omega \frac{\text{tr}[\mathbf{T}]}{3} \mathbf{I}. \tag{4.19}$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$(1 - 2\mu\omega) \mathbf{T} = \lambda\omega \frac{\text{tr}[\mathbf{T}]}{3} \mathbf{I}. \tag{4.20}$$



Para que esta ecuación se cumpla para algún escalar  $\omega$  sólo existen dos posibilidades: o bien  $\mathbf{T} = \frac{\text{tr}[\mathbf{T}]}{3}\mathbf{I}$ , o bien ambos lados de la igualdad se anulan. En el primer caso la tensión es esférica y se cumple

$$(1 - 2\mu\omega)\frac{\text{tr}[\mathbf{T}]}{3}\mathbf{I} = \lambda\omega\frac{\text{tr}[\mathbf{T}]}{3}\mathbf{I} \Rightarrow 1 - 2\mu\omega = 3\lambda\omega \Rightarrow \omega = (3\kappa)^{-1}. \quad (4.21)$$

En el segundo caso la tensión es desviadora,  $\text{tr}[\mathbf{T}] = 0$ , y el paréntesis en la ecuación (4.20) debe de anularse, para lo cual es necesario que  $\omega = (2\mu)^{-1}$ .

■

## 7. Termoelasticidad lineal

Así como la relación entre las tensiones y deformaciones se observa cotidianamente, también se aprecia en multitud de situaciones que los campos de temperatura y tensión/deformación están acoplados. Así pues, si se calienta un cuerpo éste se deforma y a veces aparecen en él tensiones. Más aún, en ciertos materiales se observa que incluso una deformación elástica produce cambios de temperatura (el llamado efecto Gough-Joule). Este problema acoplado es en general muy complejo, pero si el acoplamiento es únicamente en un sentido (la temperatura produce deformaciones pero no viceversa) su formulación es sencilla. Debido a su importancia consideramos en esta sección las relaciones constitutivas de la termoelasticidad lineal.

Se comprueba experimentalmente que un cuerpo isótropo, homogéneo y libre de coacciones ( $\Gamma_u = 0$ ), cuando se calienta uniformemente se deforma sin que aparezcan tensiones. Esta deformación de origen puramente térmico es únicamente volumétrica y proporcional al incremento térmico y a un coeficiente de dilatación térmica que indicamos con el símbolo  $\alpha$  y con dimensiones de temperatura inversa. Llamando  $\mathbf{D}_{ter}$  a las deformaciones térmicas se cumple por tanto

$$\mathbf{D}_{ter} = \alpha \Delta T \mathbf{I}, \quad (4.22)$$

siendo  $\Delta T$  el salto térmico respecto a una temperatura en la que no existen deformaciones térmicas. Admitiendo el principio de superposición, podemos formular una ley de Hooke generalizada con efectos térmicos de la forma

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{mec} + \mathbf{D}_{ter} = \frac{1 + \nu}{E}\mathbf{T} - \frac{\nu}{E}\text{tr}[\mathbf{T}]\mathbf{I} + \alpha \Delta T \mathbf{I}. \quad (4.23)$$

La deformación tiene por tanto dos componentes: una mecánica y otra térmica. Esta relación, válida en cualquier sistema de coordenadas, tiene la siguiente expresión en componentes cartesianas:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) + \alpha\Delta T, & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) + \alpha\Delta T, & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha\Delta T, & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G},\end{aligned}\quad (4.24)$$

La relación de Hooke (4.23) se puede invertir para obtener las ecuaciones de Lamé con efecto de la temperatura. Como en la sección 5, para despejar la tensión de las ley de Hooke aplicamos el operador traza a ambos lados de la identidad (4.23) y obtenemos

$$\begin{aligned}\text{tr}[\mathbf{D}] &= \frac{1+\nu}{E}\text{tr}[\mathbf{T}] - \left(\frac{\nu}{E}\text{tr}[\mathbf{T}] + \alpha\Delta T\right)\text{tr}[\mathbf{I}] \\ &= \frac{1-2\nu}{E}\text{tr}[\mathbf{T}] + 3\alpha\Delta T.\end{aligned}\quad (4.25)$$

Así pues, la traza de la tensión es

$$\text{tr}[\mathbf{T}] = \frac{E}{1-2\nu}\theta - \frac{3\alpha E}{1-2\nu}\Delta T. \quad (4.26)$$

Sustituyendo este resultado en (4.23) obtenemos finalmente las ecuaciones de Lamé con efecto de la temperatura:

$$\mathbf{T} = 2G\mathbf{D} + \lambda\theta\mathbf{I} - \beta\Delta T\mathbf{I}, \quad (4.27)$$

siendo  $\beta$  la constante

$$\beta = \frac{\alpha E}{1-2\nu}. \quad (4.28)$$

El tensor  $-\beta\Delta T\mathbf{I}$  se conoce con el nombre de la tensión de origen térmico, así pues

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{mec} + \mathbf{T}_{ter}, \quad (4.29)$$

es decir, que en un sólido elástico sometido a deformación y a cambio de temperatura las tensiones tiene dos componentes, una de origen puramente mecánico y otro térmico. Nótese que un un cuerpo que no se puede deformar libremente, si se somete a un salto térmico, desarrolla tensiones de origen térmico no nulas. Estas tensiones pueden ser muy grandes en elementos de máquinas sometidos a altas temperatura de funcionamiento si éstos no se diseñan cuidadosamente.

**Ejemplo 7.5:** Un cilindro de goma con diámetro  $d = 20$  mm y longitud  $L = 200$  mm se aloja en una cavidad cilíndrica de diámetro  $D = 20,05$  mm. Sobre el cilindro se coloca un pistón rígido.

1. Calcular el estado tensional y de deformación en el cilindro si el pistón lo comprime con una fuerza total de 1000 N (nótese que el estado de tensión es cilíndrico). Indicar la longitud del cilindro deformado.
2. Calcular otra vez el estado tensional y de deformación en el cilindro si, manteniendo fijo el pistón, el conjunto se calienta  $140$  °C.

Datos: suponer que las paredes del cilindro y el pistón son infinitamente rígidas y que no ejercen ningún rozamiento sobre el cilindro. Constantes del material del cilindro:  $E = 500$  MPa,  $\nu = 0.48$ ,  $\alpha = 20 \cdot 10^{-6}(\text{°C})^{-1}$ .

El estado tensional y de deformación será, en los dos casos, cilíndrico y homogéneo (debido a la simetría de la geometría y cargas, a la ausencia de fuerzas volumétricas y de rozamiento). Si escogemos un sistema de coordenadas cartesiano tal que el eje  $x$  coincida con el eje del cilindro, la expresión matricial de la tensión y deformación en este sistema será

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

Estudiamos ahora por separado los dos casos de carga:

1) Cuando se comprime el cilindro no se sabe si éste contacta con la cavidad. Suponiendo que no contacta, la única componente no nula del tensor de tensiones es  $\sigma_x$  y su valor es  $\sigma_x = -P/A$  siendo  $A = \frac{\pi}{4}20^2$  mm<sup>2</sup> el área de la sección. La longitud del diámetro deformado bajo esta hipótesis sería:

$$d' = (1 + e)d = \left(1 + \frac{\nu}{E}\sigma_x\right)d = (1 + 3,06 \cdot 10^{-3})d = 20,06 \text{ mm}.$$

Este resultado contradice la hipótesis de que el cilindro no toca la cavidad, así que no puede ser cierta. Si el contacto ocurre, entonces la tensión  $q$  ha de ser no nula, y la deformación en dirección radial  $e$  es conocida y de valor  $e = 0,05/20 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ . El resto de componentes de los tensores de tensión y deformación se calculan a partir de las ecuaciones de Lamé o de la ley de Hooke

generalizada:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -P/A = -3,18 \text{ MPa} , \\ q &= \frac{1}{1-\nu}(E e + \nu\sigma_x) = -0,53 \text{ MPa} , \\ \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - 2\nu q = -5,34 \cdot 10^{-3} .\end{aligned}$$

La longitud del cilindro deformado es:  $L' = (1 + \varepsilon_x)L = 198,93 \text{ mm}$ .

2) Suponemos, como en el caso anterior, que al dilatarse el cilindro, éste no toca con las paredes de la cavidad. En este caso, obtenemos en primer lugar la tensión en dirección axial en el cilindro a partir de la condición de que la longitud de éste no varía:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T = 0 \implies \sigma_x = -\alpha E \Delta T = -1,4 \text{ MPa} .$$

A partir de ésta calculamos el diámetro deformado:

$$d' = (1 + \varepsilon_x) d = (1 - \frac{\nu}{E}\sigma_x + \alpha \Delta T)d = 20,08 \text{ mm} ,$$

que es contrario a la hipótesis. Por lo tanto se puede garantizar que habrá contacto entre cilindro y cavidad y que, como en el caso primero,  $e = 2,5 \cdot 10^{-3}$ . Planteamos las ecuaciones de Hooke para las deformaciones en dirección  $x$  y radial y obtenemos

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - 2\frac{q}{E} + \alpha \Delta T (= 0) , \\ e &= \frac{1-\nu}{E}q - \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T (= 2,5 \cdot 10^{-3}) ,\end{aligned}$$

y resolvermos las dos incógnitas  $q$  y  $\sigma_x$  que resultan tener valores  $\sigma_x = -14,44 \text{ MPa}$  y  $q = -13,89 \text{ MPa}$ .

△

## 8. Problemas

4.1 En un cuerpo deformable con un estado tensional  $\mathbf{T}$  se define la presión media

en cada punto como el escalar

$$p_m = -\frac{1}{3}\text{tr}[\mathbf{T}] .$$

Demuestra que cuando el sólido es elástico lineal se verifica la ecuación constitutiva

$$p_m = -\kappa \theta ,$$

siendo  $\kappa$  una constante del material denominada rigidez volumétrica y de valor  $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}G$  y  $\theta$  la deformación volumétrica infinitesimal.

**4.2** Un sólido elástico lineal con módulo de Young  $E = 20$  GPa y coeficiente de Poisson  $\nu = 0,4$  se encuentra sometido a una presión hidrostática de 100 MPa.

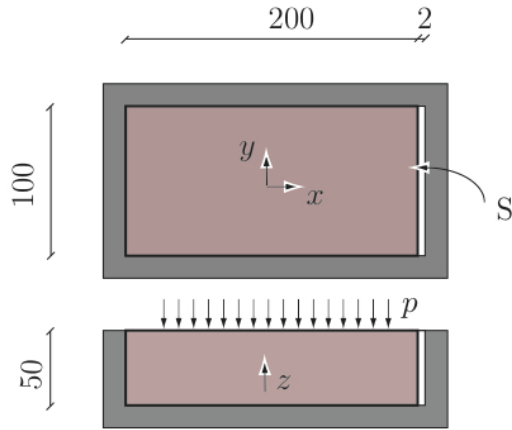
- 1) Postular la expresión del tensor de tensiones, razonando, sin operar, por qué es válido.
- 2) Si el volumen del sólido antes de ser sometido a presión era de  $10^{-2} \text{ m}^3$ , ¿Cuál será su volumen bajo presión?
- 3) Justificar por qué la respuesta a la pregunta anterior es independiente de la forma del sólido.
- 4) En el caso de que  $\nu = 0,5$ , ¿Cuál sería la deformación volumétrica?
- 5) No existen materiales con coeficiente de Poisson mayor que 0,5. Intenta razonar, a partir del ensayo descrito en este problema que ocurría al someter a presión uniforme un material que tuviera coeficiente de Poisson 0,6. ¿Es físicamente posible?

**4.3** Las matrices de componentes en coordenadas esféricas del tensor de tensiones  $\mathbf{T}$  y del tensor de deformación infinitesimal  $\mathbf{D}$  son:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{r\phi} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \tau_{\theta\phi} \\ \tau_{\phi r} & \tau_{\phi\theta} & \sigma_{\phi\phi} \end{bmatrix} , \quad [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} & \gamma_{r\theta}/2 & \gamma_{r\phi}/2 \\ \gamma_{\theta r}/2 & \epsilon_{\theta\theta} & \gamma_{\theta\phi}/2 \\ \gamma_{\phi r}/2 & \gamma_{\phi\theta}/2 & \epsilon_{\phi\phi} \end{bmatrix} .$$

Obtener la ley de Hooke en coordenadas esféricas.

4.4 Un cuerpo elástico deformable de dimensiones  $200 \times 100 \times 50 \text{ mm}^3$  se aloja, como se indica en la figura, en una cavidad rígida y lisa de dimensiones  $202 \times 100 \times 50 \text{ mm}^3$ . Sobre la cara libre se aplica una presión exterior de valor  $p = 500 \text{ N/mm}^2$ . Si el cuerpo tiene módulo de Young  $E = 10^4 \text{ N/mm}^2$  y coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , hallar todas las componentes de los tensores de tensión y deformación expresados en el sistema de coordenadas  $(O, x, y, z)$  de la figura.

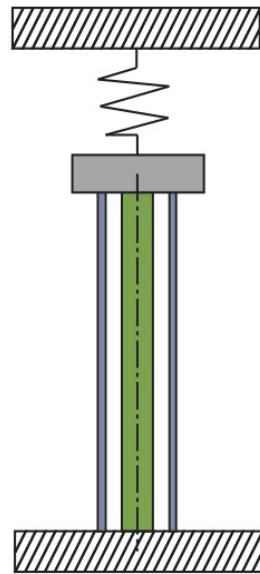


4.5 Un cilindro de acero y radio 2 cm tiene un extremo pegado a una pared rígida y otro extremo pegado a una placa también considerada rígida. El cilindro se encuentra en el interior de un cilindro hueco, también pegado a la pared y la placa. Este segundo cilindro es de bronce, y sus radios exterior e interior tiene dimensiones de 4 y 3 cm, respectivamente. Ambos cilindros tiene longitud  $L = 60 \text{ cm}$ .

La placa está unida a una segunda pared mediante un resorte elástico de constante  $K = 5 \cdot 10^8 \text{ N/m}$ , inicialmente sin deformar.

Si la camisa y el cilindro sufren un incremento de temperatura  $\Delta T = 20^\circ \text{ C}$ , encontrar las tensiones y deformaciones en los dos cilindros así como la elongación del muelle.

Datos:  $E_a = 210 \text{ GPa}$ ,  $E_b = 100 \text{ GPa}$ ,  $\alpha_a = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ,  $\alpha_b = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ .



# Capítulo 5

## Estudio del problema elástico completo

---

En los capítulos anteriores se han presentado los principales elementos del modelo del sólido deformable, incluyendo un caso particular de modelo constitutivo, el elástico, que sirve de conexión entre la deformación y la tensión. Con todos estos ingredientes se puede finalmente plantear el problema completo de un cuerpo (sólido, elástico) deformable. Matemáticamente, éste se expresa como un problema de valores de contorno, mediante ecuaciones en derivadas parciales o en forma integral. En este capítulo formulamos este problema y discutimos algunas de sus propiedades más importantes.

El estudio completo del problema elástico se puede encontrar en [1], o en el tratado clásico de [3].

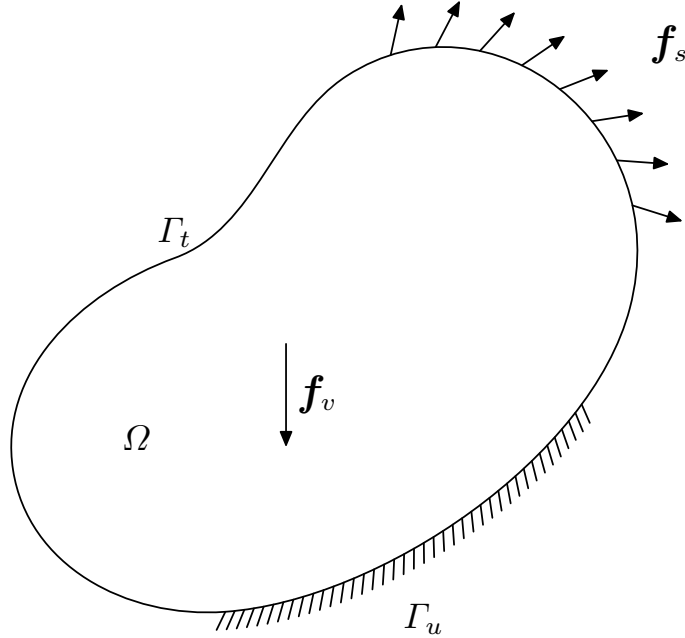


Figura 5.1: El cuerpo deformable

## 1. Enunciado completo del problema

Un cuerpo elástico deformable es un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  con contorno  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ . En  $\Gamma_u$  el cuerpo está sujeto, y en  $\Gamma_t$  hay unas fuerzas de superficie  $\mathbf{f}_s$  conocidas. Todo el cuerpo está sometido a fuerzas volumétricas  $\mathbf{f}_v$ . Si el cuerpo está en equilibrio, es isótropo y elástico, y sólo se consideran pequeñas deformaciones, el desplazamiento  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la deformación  $\mathbf{D}$  y la tensión  $\mathbf{T}$  satisfacen el siguiente problema de valores de contorno:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{f}_s &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega, \\
 \mathbf{T} \mathbf{n} &= \mathbf{f}_s && \text{sobre } \Gamma_t, \\
 \mathbf{T}^T &= \mathbf{T}, \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_u, \\
 \mathbf{D} &= \nabla^S \mathbf{u}, \\
 \mathbf{T} &= \lambda \operatorname{tr}[\mathbf{D}] \mathbf{I} + 2G \mathbf{D}. && (5.1)
 \end{aligned}$$



Este sistema de ecuaciones en derivadas parciales es el objeto de la teoría de la elasticidad clásica. De hecho, simplemente reemplazando la última de estas ecuaciones por una relación constitutiva más compleja se define el problema de la mecánica de sólidos deformables en pequeñas deformaciones.

## 2. El principio de los trabajos virtuales

El problema de contorno definido por las ecuaciones (5.1) se puede formular de manera equivalente (con alguna salvedad en la regularidad de las soluciones) en forma integral. Esta nueva formulación, conocida con el nombre del principio de los trabajos virtuales es la base del cálculo matricial de estructuras, y de métodos numéricos como, por ejemplo, el método de los elementos finitos.

Antes de enunciar este principio, se define un *desplazamiento virtual* como un campo  $\delta \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  cualquiera que satisfice  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  en  $\Gamma_u$ . Cualquier campo vectorial definido de esta manera es un desplazamiento virtual válido y es, por tanto, completamente independiente del desplazamiento real  $\mathbf{u}$ .

**Teorema 2.1:** *Un cuerpo deformable sujeto en  $\Gamma_u$ , sometido a fuerzas volumétricas  $\mathbf{f}_v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  y fuerzas de superficie  $\mathbf{f}_s : \Gamma_t \rightarrow \mathbb{R}^3$  está en equilibrio bajo el campo de desplazamiento  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  si, para cualquier desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{u}$  se verifica*

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D}[\delta \mathbf{u}] dV = \int_{\Omega} \mathbf{f}_v \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}_s \cdot \delta \mathbf{u} dS, \quad (5.2)$$

siendo  $\mathbf{D}[\delta \mathbf{u}] = \nabla^S[\delta \mathbf{u}]$ , y  $\mathbf{T} = f(\mathbf{D})$  con  $\mathbf{D} = \nabla^S[\mathbf{u}]$ .

DEMOSTRACIÓN: Partiendo de la ecuación diferencial del equilibrio interno se puede deducir que, para un desplazamiento virtual cualquiera:

$$0 = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{f}_v) \cdot \delta \mathbf{u} dV.$$

Integrando por partes esta integral, usando  $\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{f}_s$  sobre  $\Gamma_t$  y  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  sobre  $\Gamma_u$  se obtiene (5.2). ■

### Observaciones 2.2:

- i. El principio de los trabajos virtuales se ha demostrado a partir del principio de Cauchy. Alternativamente, el principio de los trabajos virtuales se podría postular y, a partir de él, obtener el principio de Cauchy. La situación es análoga a la que aparece en la mecánica clásica, en la cual las leyes de Newton se pueden derivar del principio de Hamilton o viceversa.
- ii. El principio de los trabajos virtuales es la formulación integral (o variacional, o débil, como también se conoce) de la ecuación diferencial del equilibrio de fuerzas. El resto de ecuaciones de (5.1) se imponen exactamente en cada punto. Existen formulaciones variacionales más generales que las del principio de los trabajos virtuales, que imponen de forma débil el resto de las ecuaciones del problema elástico (véase, por ejemplo, [9, 2]).  $\square$

## 3. Las ecuaciones de Navier

En las secciones 1 y 2 se ha planteado, de dos maneras alternativas, el problema de contorno de la mecánica de los cuerpos deformables con pequeñas deformaciones. En ambas formulaciones, aparecen como incógnita los campos de desplazamiento  $\mathbf{u}$ , de deformación  $\mathbf{D}$  y de tensión  $\mathbf{T}$ . Para la resolución analítica de algunos problemas resulta útil plantear el problema de contorno *únicamente en función del campo de desplazamientos*. Cuando esto se lleva a cabo para las ecuaciones de la elasticidad lineal se obtienen unas fórmulas muy compactas que reciben en nombre de *ecuaciones de Navier*.

Para obtener dichas ecuaciones, basta con sustituir la expresión de la tensión  $\mathbf{T}$  en función de la deformación y ésta del desplazamiento  $\mathbf{u}$  resultando en

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{1} + 2G \nabla^S \mathbf{u}] + \mathbf{f}_v &= \mathbf{0} , \\ (\lambda \operatorname{div} [\mathbf{u} \mathbf{1} + 2G \nabla^S \mathbf{u}) \mathbf{n} &= \mathbf{f}_s , \quad \text{en } \Gamma_t , \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} , \quad \text{en } \Gamma_u . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Simplificando la primera de estas ecuaciones mediante las relaciones

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\operatorname{div} (\mathbf{u}) \mathbf{1}) &= \operatorname{grad} (\operatorname{div} [\mathbf{u}]) , \\ \operatorname{div} (\operatorname{grad} \mathbf{u}) &= \Delta \mathbf{u} , \\ \operatorname{div} (\operatorname{grad}^T \mathbf{u}) &= \operatorname{grad} (\operatorname{div} (\mathbf{u})) , \end{aligned} \tag{5.4}$$

se demuestra inmediatamente que (5.3) se puede escribir como

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \operatorname{grad} (\operatorname{div} (\mathbf{u})) + G \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_v &= \mathbf{0} , \\ (\lambda \operatorname{div} [\mathbf{u}] \mathbf{1} + 2G \nabla^S [\mathbf{u}]) \mathbf{n} &= \mathbf{f}_s , \quad \text{en } \Gamma_t , \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} , \quad \text{en } \Gamma_u . \end{aligned} \tag{5.5}$$

#### 4. El principio de Saint Venant

La experiencia indica que para el estudio de la solución a un problema de un cuerpo deformable los detalles exactos de cómo están aplicadas las fuerzas de superficie no son muy relevantes. Por ejemplo, cuando se realiza un ensayo de tracción, la forma de las mordazas de la máquina de tracción, aunque no puede ser completamente aleatoria, no afecta el resultado de los ensayos. Lo mismo ocurre con las tensiones en el terreno bajo una zapata, o en un pistón cuando está sometido a las presiones de los gases en el interior de un cilindro.

El *principio de Saint Venant* establece que los campos de desplazamiento, deformación y tensión debidos a dos distribuciones de fuerzas de superficie estáticamente equivalentes son iguales lejos de la zona de aplicación. Esta definición deja sin definir cuán lejos los efectos de los detalles en la aplicación de las fuerzas dejan de ser perceptibles, así que resulta un poco imprecisa. Como regla general, se puede estimar que esta distancia es igual a la dimensión característica de la zona de aplicación de las cargas. En cualquier caso, su aceptación es fundamental en ingeniería y siempre lo daremos como válido.

El principio de Saint Venant data de 1855, aunque con el tiempo se ha demostrado que no es un principio como tal sino que puede ser demostrado. Parte de la dificultad en demostrarlo radica en que su definición, como se comentó anteriormente, es algo imprecisa. La definición precisa de este principio se suele asociar a [7].

#### 5. Estados planos de tensión y deformación

El tratamiento analítico de los problemas de cuerpos deformables es, en general, muy complicado. Existen dos casos particulares que simplifican mucho la descripción matemática del problema y que, además, son muy habituales. Estos son los casos de tensión y deformación plana en los que algunas de las componentes de tensor de tensión o deformación son nulas en todos los puntos del cuerpo. Como se verá a continuación, esto es el resultado de geometrías y cargas muy particulares.

## 5.1. Estados de tensión plana

**Definición 5.3:** *Se dice que un cuerpo se encuentra en un **estado plano de tensión** cuando existe un sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  tal que el tensor de tensiones en todo punto del cuerpo tiene la expresión*

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_1(x_1, x_2) & \tau_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \tau_{21}(x_1, x_2) & \sigma_2(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Este estado de tensión aparece, de forma muy aproximada, en cuerpos planos, muy delgados con cargas de superficie y volumen contenidas en dicho plano. Nótese que en toda esta sección la notación  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  se refiere a las tensiones normales a los planos coordenados, y no a las tensiones principales.

El tensor de deformación en estados planos de tensión tiene por expresión

$$[\mathbf{D}] = \left[ \frac{1+\nu}{E} \mathbf{T} - \frac{\nu}{E} \text{tr}[\mathbf{T}] \mathbf{1} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 - \nu \sigma_2}{E}(x_1, x_2) & \frac{\tau_{12}}{G}(x_1, x_2) & 0 \\ \frac{\tau_{21}}{G}(x_1, x_2) & \frac{\sigma_2 - \nu \sigma_1}{E}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)(x_1, x_2) \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Nótese que la deformación  $\varepsilon_3$  no se anula.

## 5.2. Estados de deformación plana

**Definición 5.4:** *Se dice que un cuerpo se encuentra en un **estado plano de deformación** cuando existe un sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  tal que el tensor de deformación en todo punto del cuerpo tiene la expresión*

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(x_1, x_2) & \frac{\gamma_{12}}{2}(x_1, x_2) & 0 \\ \frac{\gamma_{21}}{2}(x_1, x_2) & \varepsilon_2(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Este estado de deformación aparece, de forma muy aproximada, en cuerpos con simetría axial y cargas ortogonales a dicho eje de simetría, que ha de coincidir con el eje  $x_3$  del sistema de referencia indicado anteriormente. Los cuerpos que se

encuentran en un estado plano de deformación tiene un campo de desplazamientos que, empleando el sistema de referencia cartesiano que se menciona, verifica

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2), \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \quad (5.9)$$

En estos estados de deformación, el tensor de tensiones tiene por expresión matricial en la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}] &= [2G\mathbf{D} + \lambda\text{tr}[\mathbf{D}]\mathbf{1}] \\ &= \begin{bmatrix} 2G\varepsilon_1(x_1, x_2) + \lambda\theta(x_1, x_2) & G\gamma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ G\gamma_{21}(x_1, x_2) & 2G\varepsilon_2(x_1, x_2) + \lambda\theta(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\theta(x_1, x_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Nótese que, en general, la componente  $\sigma_3$  no se anula. De hecho, podemos escribir

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2G(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 2\lambda\theta = 2(\lambda + G)\theta. \quad (5.11)$$

Como  $\lambda + G = \frac{\lambda}{2\nu}$ , la tensión en la dirección  $x_3$  se puede expresar también como

$$\sigma_3 = \lambda\theta = 2\nu(\lambda + G)\theta = \nu(\sigma_1 + \sigma_2). \quad (5.12)$$

### 5.3. El diagrama de Mohr en estados planos

En un estado plano, la dirección que hemos denominado  $x_3$  es principal y la tensión asociada es una tensión principal (que se anula en el caso de tensión plana). En el plano  $x_1x_2$ , existen dos tensiones principales que llamamos  $\sigma_I, \sigma_{II}$  con sus direcciones principales correspondientes  $\mathbf{v}_I, \mathbf{v}_{II}$ . Nótese que no se corresponden necesariamente con las tensiones principales  $\sigma_1, \sigma_2$  porque puede ser que  $\sigma_3$  sea la mayor de las tres tensiones principales o la intermedia.

Para continuar, y por simplificar la notación, supongamos que el sistema coordenado  $x_1, x_2, x_3$  es el cartesiano  $x, y, z$ . Entonces, en cualquiera de los dos tipos de estados planos las tensiones principales  $\sigma_I$  y  $\sigma_{II}$  son las raíces del polinomio característico

$$0 = \left| \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\lambda + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2. \quad (5.13)$$

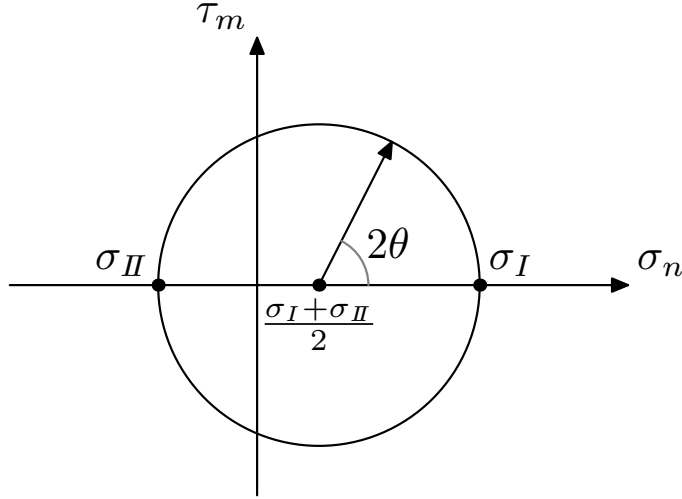


Figura 5.2: Diagrama de Mohr para estados planos

Éstas se pueden escribir de forma explícita como

$$\lambda = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (5.14)$$

Consideremos ahora las componentes intrínsecas de la tensión  $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$  sobre planos de normal  $\mathbf{n}$  contenida en el plano  $xy$ , es decir, tal que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0$ . En la base principal  $\mathcal{B}_P = \{\mathbf{v}_I, \mathbf{v}_{II}, \mathbf{k}\}$  este vector se puede escribir como  $\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{v}_I + \sin \theta \mathbf{v}_{II}$ , así pues la tensión normal sobre dicho plano es

$$\begin{aligned} \sigma_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\mathbf{n} &= \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \sigma_I \cos^2 \theta + \sigma_{II} \sin^2 \theta \\ &= \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cos(2\theta). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Para calcular la componente tangencial definimos el vector unitario  $\mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{k}$ . Este vector define, *sólo para problemas planos* la única dirección tangencial posible sobre

el plano de normal  $\mathbf{n}$  donde puede haber tensión tangencial. Este vector además tiene expresión en la base principal  $\mathbf{m} = \sin \theta \mathbf{v}_I - \cos \theta \mathbf{v}_{II}$  así que podemos definir la tensión tangencial  $\tau_m$  como la proyección  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{m}$  y calcularla explícitamente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \tau_m = \mathbf{m} \cdot \mathbf{T}\mathbf{n} &= \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \sigma_I \sin \theta \cos \theta - \sigma_{II} \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin(2\theta) . \end{aligned} \quad (5.16)$$

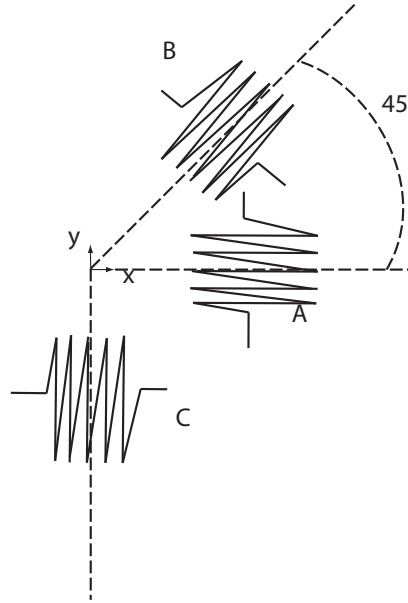
A partir de las expresiones (5.15) y (5.16) se interpreta que las componentes intrínsecas  $(\sigma_n, \tau_m)$  de la tensión en estados planos recorren una circunferencia en el plano como se indica en la Figura 5.2. A diferencia del diagrama de Mohr para estados de tensión tridimensionales, en el caso plano tiene sentido representar un círculo completo, puesto que en este caso las tensiones tangenciales  $\tau_m$  sí que pueden ser negativas.

## 6. Problemas

**5.1** Se colocan tres galgas extensométricas sobre la superficie de un cuerpo deformable como se indica en la figura. Si las galgas miden:

$$\varepsilon_A = 10^{-3}, \quad \varepsilon_B = 2 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_C = -3 \cdot 10^{-3},$$

y se sabe que el sólido está en un estado de tensión plana, siendo  $z$  el eje de tensión nula. Calcular el tensor de deformación *completo* en el punto en el que las galgas realizan las mediciones ( $E = 20000 \text{ Kp/mm}^2$  y  $\nu = 0,35$ ).

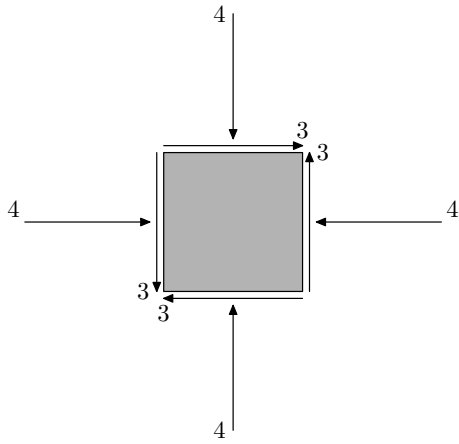


**5.2** Dados los estados tensionales I y II correspondientes a estados planos de tensión,

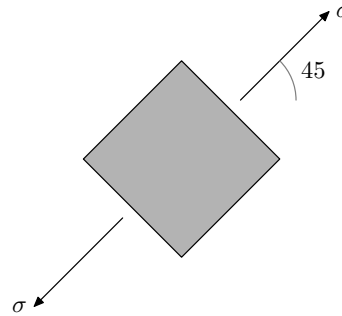
- 1) Considerar el estado III que resulta de sumar las tensiones que crean los estados I y II. Dibujar el diagrama de Mohr correspondiente a este tercer estado.
- 2) Determinar de forma gráfica el valor de  $\sigma$  para que el estado III sea un estado de cortante puro.
- 3) Determinar de forma gráfica el valor mínimo de  $\sigma$  para que en el estado III no haya compresión en ningún plano.
- 4) Determinar de forma gráfica el valor máximo de  $\sigma$  para que en el estado III no haya tracción en ningún plano.
- 5) Resuelve analíticamente las tres preguntas anteriores.



(NOTA: las tensiones en el estado I están expresadas en MPa).



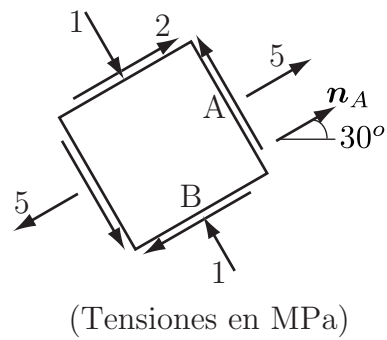
Estado I



Estado II

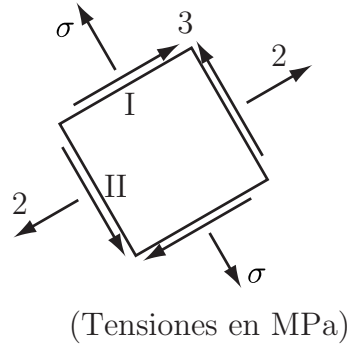
**5.3** Un punto de un cuerpo tiene un estado tensional plano cuya representación gráfica se adjunta.

- 1) Dibuja el diagrama de Mohr del estado tensional.
- 2) Identifica sobre la circunferencia de Mohr el estado tensional de las caras  $A$  y  $B$ .
- 3) Calcula a partir de la figura el valor de las tensiones principales.
- 4) Indica el ángulo (y el sentido) que forma la normal  $n_A$  con la dirección principal primera.

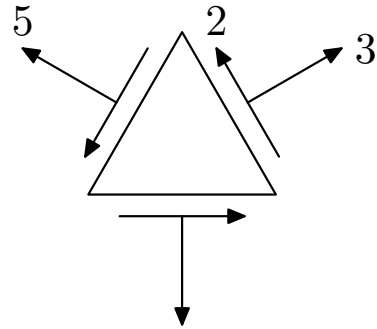


**5.4** La figura indica el estado tensional plano de un punto en un cuerpo deformable.

1. Halla el valor de la tensión normal  $\sigma$  sabiendo que la tensión cortante máxima en ese punto es de 5 MPa.
2. Dibuja el círculo de Mohr correspondiente al estado de tensión resultante.
3. Identifica, sobre el círculo, el estado tensional de la cara I y de la cara II.



**5.5** Calcula, a partir del diagrama de Mohr, el valor de las tensiones normales y tangenciales sobre cada una de las caras del triángulo equilátero de la figura, sabiendo que está en equilibrio y que las tensiones de la figura están expresadas en MPa.



# Capítulo 6

## La energía elástica

---

En el capítulo 5 se cierra la definición de las ecuaciones que describen el problema de los cuerpos elásticos. En este capítulo no se añade por tanto ningún elemento que no se encuentre contenido, de alguna manera, en las ecuaciones del capítulo anterior. Sin embargo, la identificación de la expresión de la energía abre la puerta a teoremas extremadamente útiles para la resolución de problemas en Resistencia de Materiales y Cálculo de Estructuras.

### **1. El trabajo de las fuerzas exteriores sobre un cuerpo deformable**

El concepto de trabajo es central en mecánica. Para un cuerpo deformable cualquiera, es más fácil definir el trabajo realizado durante un incremento (diferencial) del campo de desplazamientos. Como existen dos tipos de fuerzas que

se pueden aplicar sobre un cuerpo deformable, a saber, volumétricas y de superficie, este incremento de trabajo es

$$dW_{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_v \cdot d\mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{u} dS . \quad (6.1)$$

Si lo que se desea es calcular el trabajo total realizado durante un proceso de carga completo sobre un cuerpo deformable la definición debe de integrar (6.1).

**Definición 1.1:** *Sea un cuerpo deformable sometido a un proceso de carga fuerzas externas volumétricas y de superficie  $(\tilde{\mathbf{f}}_v(t), \tilde{\mathbf{f}}_s(t))$  definidas en el intervalo  $t \in [0, T]$ . Si en cada instante el campo de desplazamientos es  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  entonces el trabajo de las fuerzas externas durante dicha deformación se define mediante la integral:*

$$W_{ext} = \int_0^T \left[ \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{f}}_v \cdot \tilde{\mathbf{u}}' dV + \int_{\Gamma_t} \tilde{\mathbf{f}}_s \cdot \tilde{\mathbf{u}}' dA \right] dt . \quad (6.2)$$

siendo  $\tilde{\mathbf{u}}'(t) = \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{u}}(t)$ .

Esta definición es completamente general y revela que la definición de trabajo depende del proceso de carga, no sólo de los valores iniciales y finales de  $\tilde{\mathbf{f}}_v$  y  $\tilde{\mathbf{f}}_s$ . Esto complica enormemente el cálculo del trabajo, porque requiere la determinación de la solución  $\mathbf{u}$  en cada instante de carga. Este es un resultado general que se estudia con detalle en termodinámica.

Para sólidos deformables elásticos lineales el siguiente resultado simplifica la definición general del trabajo:

**Teorema 1.2: (T. de Clapeyron)** *El trabajo realizado por un sistema de cargas  $(\tilde{\mathbf{f}}_v(t), \tilde{\mathbf{f}}_s(t))$  definidas en el intervalo  $t \in [0, T]$ , con  $(\tilde{\mathbf{f}}_v(0), \tilde{\mathbf{f}}_s(0)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ , sobre un cuerpo elástico lineal es*

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u} dV + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{u} dA , \quad (6.3)$$

siendo  $\mathbf{f}_v = \tilde{\mathbf{f}}_v(T)$ ,  $\mathbf{f}_s = \tilde{\mathbf{f}}_s(T)$  y  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}(T)$  el campo de desplazamiento al final del proceso de carga.

La importancia de este resultado es que, para calcular el trabajo total del proceso, sólo es necesario encontrar el desplazamiento en un estado de carga, el final. Además, revela que el trabajo externo de cualquier proceso de carga sólo depende del valor final de las fuerzas volumétricas y de superficie.

DEMOSTRACIÓN: Para demostrar este resultado supondremos que  $\tilde{\mathbf{f}}_v(t) = p(t)\mathbf{f}_v$  y  $\tilde{\mathbf{f}}_s(t) = p(t)\mathbf{f}_s$ , siendo  $p(t)$  una función escalar que satisface  $p(0) = 0$  y  $p(T) = 1$ . Esta simplificación supone que las tres componentes de las fuerzas volumétricas y las tres de las fuerzas de superficie varían de la misma manera. Esta hipótesis simplifica la demostración pero el mismo argumento que sigue se podría usar con seis factores de proporcionalidad independientes.

Si  $\mathbf{u}$  es el campo de desplazamientos cuando sobre el cuerpo actúa el sistema de fuerzas  $(\mathbf{f}_v, \mathbf{f}_s)$ , en cada instante  $\tilde{\mathbf{u}}(t) = p(t)\mathbf{u}$ , debido a la linealidad del problema. Utilizando la definición 6.2 del trabajo se sigue que

$$\begin{aligned}
 W_{ext} &= \int_0^T \left[ \int_{\Omega} p(t) p'(t) \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_t} p(t) p'(t) \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{u} \, dA \right] dt \\
 &= \left[ \int_{\Omega} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{u} \, dA \right] \int_0^T p(t) p'(t) \, dt \\
 &= \left[ \int_{\Omega} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{u} \, dA \right] \left[ \frac{p^2(t)}{2} \right]_0^T \\
 &= \left[ \int_{\Omega} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{u} \, dA \right] \frac{1}{2},
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

■

## 2. La energía elástica de deformación

De la misma manera que un resorte elástico, al deformarse, almacena energía, también los cuerpos deformables lo hacen. Esta energía se llama la **energía elástica de deformación**. Un sistema elástico es, por definición, un sistema deformable en el que todo el trabajo que realizamos para deformar el cuerpo se recupera al descargar el sistema de las fuerzas aplicadas. Para calcular la energía elástica de deformación en un estado cualquiera bastará por tanto con calcular el trabajo empleado en deformar el cuerpo hasta dicho punto.

Esta definición no es válida para sistemas mecánicos más generales, en los que se pueda dar disipación energética por mecanismos internos (plasticidad,

viscoelasticidad, daño, ...). En el caso que nos ocupa, calculamos el trabajo realizado por todas las fuerzas exteriores aplicadas sobre un cuerpo deformable que es:

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u} \, dV + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{u} \, dS . \quad (6.5)$$

Por el principio de los trabajos virtuales, si escogemos el desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{u}$  igual al desplazamiento real  $\mathbf{u}$  obtenemos

$$\int_{\Omega} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{u} \, dS = \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, dV , \quad (6.6)$$

Comparando (6.5) y (6.6) se concluye que

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, dV . \quad (6.7)$$

La última expresión permite calcular la energía en un estado de deformación empleando únicamente variables del interior del cuerpo y se conoce como  $W_{int}$  la energía elástica almacenada.

La densidad de energía elástica almacenada se puede escribir de varias maneras. Si expresamos todo en función de la deformación, obtendremos

$$\mathbf{T} : \mathbf{D} = (\lambda \operatorname{tr}[\mathbf{D}]\mathbf{1} + 2G\mathbf{D}) : \mathbf{D} = \lambda \operatorname{tr}[\mathbf{D}]^2 + 2G\mathbf{D} : \mathbf{D} . \quad (6.8)$$

Cuando empleamos esta expresión definimos la función

$$W_{int}(\mathbf{D}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \lambda \operatorname{tr}[\mathbf{D}]^2 + 2G\mathbf{D} : \mathbf{D} \right) \, dV , \quad (6.9)$$

y a esta función, con estos argumentos, se la conoce como la *energía interna* o la energía de deformación.

Cuando la densidad de energía elástica almacenada se escribe en función de la tensión,

$$\mathbf{T} : \mathbf{D} = \mathbf{T} : \left( \frac{1+\nu}{E}\mathbf{T} - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}[\mathbf{T}]\mathbf{1} \right) = \frac{1+\nu}{E}\mathbf{T} : \mathbf{T} - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}[\mathbf{T}]^2$$

se puede expresar toda la energía elástica de la forma

$$W_{int}^*(\mathbf{T}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left( \frac{1+\nu}{E}\mathbf{T} : \mathbf{T} - \frac{\nu}{E}\operatorname{tr}[\mathbf{T}]^2 \right) \, dV \quad (6.10)$$

y se conoce como la *energía interna complementaria*.

Los valores numéricos de la energía interna y de la energía interna complementaria (y también el del trabajo de las fuerzas externas) coinciden cuando la tensión y la deformación están relacionadas (mediante la ecuación de Lamé). Sin embargo, las expresiones funcionales son muy distintas y sus propiedades también, como veremos. Además, en casos no elásticos, la energía elástica complementaria también puede definirse de forma consistente, y en ellos los valores de ambas energías no coinciden.

### 3. El teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti

El teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti es un resultado muy útil de aplicación en problemas elásticos únicamente. Establece lo siguiente:

**Teorema 3.3:** *Sea un cuerpo elástico sometido a dos sistemas de fuerzas que denominamos  $(\mathbf{f}_s^1, \mathbf{f}_v^1)$  y  $(\mathbf{f}_s^2, \mathbf{f}_v^2)$ . Si sus desplazamientos, deformaciones y tensiones son, respectivamente,  $(\mathbf{u}^1, \mathbf{D}^1, \mathbf{T}^1)$  y  $(\mathbf{u}^2, \mathbf{D}^2, \mathbf{T}^2)$ , se verifica*

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{f}_v^1 \cdot \mathbf{u}^2 dV + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_s^1 \cdot \mathbf{u}^2 dS = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{f}_v^2 \cdot \mathbf{u}^1 dV + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_s^2 \cdot \mathbf{u}^1 dS . \quad (6.11)$$

Expresado de otra manera, el teorema de Maxwell-Betti establece que el trabajo realizado por el sistema de fuerzas  $(\mathbf{f}_s^1, \mathbf{f}_v^1)$  sobre el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}^2$  es el mismo que el trabajo realizado por el sistema de fuerzas  $(\mathbf{f}_s^2, \mathbf{f}_v^2)$  sobre el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}^1$ .

DEMOSTRACIÓN: La demostración de este resultado es sencilla a partir del teorema de los trabajos virtuales. Para presentarla, nos basamos en los materiales elásticos isotrópicos, los únicos que hemos estudiado, sabiendo que el resultado es válido en condiciones más generales. Para estos materiales se cumple:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^1 : \mathbf{D}^2 &= (\lambda \operatorname{tr}[\mathbf{D}^1] \mathbf{1} + 2 G \mathbf{D}^1) : \mathbf{D}^2 \\ &= \lambda \operatorname{tr}[\mathbf{D}^1] \operatorname{tr}[\mathbf{D}^2] + 2 G \mathbf{D}^1 : \mathbf{D}^2 \\ &= \mathbf{D}^1 : (\lambda \operatorname{tr}[\mathbf{D}^2] \mathbf{1}) + \mathbf{D}^1 : (2 G \mathbf{D}^2) \\ &= \mathbf{D}^1 : (\lambda \operatorname{tr}[\mathbf{D}^2] \mathbf{1} + 2 G \mathbf{D}^2) \\ &= \mathbf{D}^1 : \mathbf{T}^2 . \end{aligned} \quad (6.12)$$

Para demostrar el teorema de Maxwell-Betti, escribimos el principio de los trabajos virtuales para el primer sistema de fuerzas

$$\int_{\Omega} \mathbf{T}^1 : \delta \mathbf{D} \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{f}_v^1 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_s^1 \cdot \delta \mathbf{u} \, dS . \quad (6.13)$$

En el principio de los trabajos virtuales podemos escoger como desplazamiento virtual el campo de desplazamiento *real* correspondiente al sistema segundo de fuerzas, con lo que obtenemos

$$\int_{\Omega} \mathbf{T}^1 : \mathbf{D}^2 \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{f}_v^1 \cdot \mathbf{u}^2 \, dV + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_s^1 \cdot \mathbf{u}^2 \, dS . \quad (6.14)$$

Podemos repetir este argumento cambiando los papeles de los sistemas de fuerzas y obtendremos:

$$\int_{\Omega} \mathbf{T}^2 : \mathbf{D}^1 \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{f}_v^2 \cdot \mathbf{u}^1 \, dV + \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}_s^2 \cdot \mathbf{u}^1 \, dS . \quad (6.15)$$

Comparando estas dos ecuaciones y empleando el resultado (6.12) queda demostrado el teorema. ■

## 4. Introducción a los modelos estructurales

Los modelos estructurales son simplificaciones del modelo del sólido deformable que sirven para estudiar la mecánica de sólidos deformables con geometrías sencillas. En todos estos modelos (la barra, la viga, la placa, etc) el concepto de punto material desaparece y se estudian de forma conjunta grupos de puntos como por ejemplo los contenidos en una misma sección recta. Esta simplificación introduce errores y aproximaciones, pero permite resolver analíticamente muchísimos problemas sencillos, pero de gran utilidad práctica.

Cada tipo de modelo estructural, como en el estudiado en el capítulo 2, define unas ecuaciones de equilibrio, unos tipos de fuerzas admisibles, una cinemática y unas relaciones constitutivas.

## 5. Los coeficientes de influencia

Consideremos un modelo estructural sobre el cual seleccionamos un número finito  $N$  de puntos denominados  $P_1, P_2, \dots, P_N$ . Sobre cada uno de estos puntos



se definen vectores unitarios  $\boldsymbol{\nu}_i, i = 1, 2, \dots, N$ , y también sobre ellos fuerzas y momentos concentrados  $\mathbf{F}_i, \mathbf{M}_j$  de forma que

$$\mathbf{F}_i = F_i \boldsymbol{\nu}_i, \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_j = M_j \boldsymbol{\nu}_j, \quad \text{con } 1 \leq i, j \leq N, i \neq j. \quad (6.16)$$

Si se quiere estudiar un sistema de fuerzas con dos o más de ellas aplicadas sobre un mismo punto, las definiciones anteriores siguen siendo válidas si se consideran dos puntos superpuestos.

**Definición 5.4:** Se llama **desplazamiento efectivo o eficaz**  $\Delta_i$  en un estado determinado de carga y deformación a la proyección del desplazamiento del punto  $P_i$  según la dirección (y sentido) del vector unitario  $\boldsymbol{\nu}_i$ :

$$\Delta_i = \mathbf{u}(P_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_i. \quad (6.17)$$

El desplazamiento efectivo tiene por tanto dimensiones de longitud y es la componente del desplazamiento del punto  $i$  conjugada con la fuerza  $\mathbf{F}_i$ , es decir, la parte del desplazamiento que produce trabajo con la fuerza  $\mathbf{F}_i$ . El trabajo por tanto efectuado por la fuerza  $\mathbf{F}_i$  es

$$W_i = \frac{1}{2} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}(P_i) = \frac{1}{2} F_i \boldsymbol{\nu}_i \cdot \mathbf{u}(P_i) = \frac{1}{2} F_i \Delta_i. \quad (6.18)$$

Así pues, la definición de desplazamientos efectivos permite ignorar el uso de vectores, en lo que respecta al cálculo de trabajos y energías.

En el caso general, cuando actúan  $N$  fuerzas, el trabajo total de las fuerzas externas se puede escribir como

$$W_{ext} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} F_i \Delta_i. \quad (6.19)$$

Si sobre un punto  $P_i$  existe un momento concentrado aplicado en lugar de una fuerza, entonces se llama **desplazamiento efectivo**  $\Delta_i$  en un estado determinado de carga a la proyección del giro del punto  $P_i$  según la dirección (y sentido) del vector unitario  $\boldsymbol{\nu}_i$ .

$$\Delta_i = \boldsymbol{\theta}(P_i) \cdot \boldsymbol{\nu}_i. \quad (6.20)$$

El desplazamiento efectivo tiene en este segundo caso dimensiones de ángulo y es el la componente del giro en  $P_i$  conjugada al par  $\mathbf{M}_i$ , es decir, la parte del giro que produce trabajo con la fuerza  $\mathbf{M}_i$ .

Si consideramos el modelo anterior, cuando únicamente se aplica una fuerza  $\mathbf{F}_i$  sobre el punto  $P_i$  (todas las demás fuerzas son cero), el punto  $P_j$  sufre un desplazamiento efectivo que denominamos  $\Delta_{ji}$  (con dimensiones de longitud o giro). De la misma manera, si estudiamos la situación ahora en la que la única fuerza sobre el sistema sea la fuerza  $\mathbf{F}_j$ , el punto  $P_i$  sufre un desplazamiento efectivo que indicamos como  $\Delta_{ij}$ . El **teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti** establece que si el modelo estructural es elástico y lineal entonces se verifica la relación

$$\frac{1}{2}F_i \Delta_{ij} = \frac{1}{2}F_j \Delta_{ji} , \quad (6.21)$$

es decir, el trabajo realizado por la fuerza generalizada  $\mathbf{F}_i$  sobre el desplazamiento generalizado debido únicamente a  $\mathbf{F}_j$  es igual a su recíproco.

**Definición 5.5:** *El coeficiente de influencia  $\delta_{ij}$  es el valor del desplazamiento efectivo en el punto  $P_i$  cuando la fuerza o momento aplicado sobre el punto  $P_j$  es unitario. Por la linealidad de la respuesta del sistema, los coeficientes de influencia se calculan como*

$$\delta_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{F_j} \quad (6.22)$$

Las dimensiones de los coeficientes de influencia son:

- i) longitud/fuerza, si  $\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j$  son ambas fuerzas puntuales.
- ii) longitud/(fuerza·longitud) si  $\mathbf{F}_i$  es una fuerza y  $\mathbf{F}_j$  es un momento.
- iii) ángulo/fuerza, si  $\mathbf{F}_i$  es un par y  $\mathbf{F}_j$  una fuerza.
- iv) ángulo/(fuerza·longitud), si  $\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j$  son ambos momentos puntuales.

Por el principio de superposición, el desplazamiento efectivo total  $\Delta_i$  en el punto  $P_i$  cuando actúan las fuerzas (generalizadas)  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_N$  es

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots = \delta_{i1}F_1 + \delta_{i2}F_2 + \dots = \sum_{k=1}^N \delta_{ik}F_k \quad (6.23)$$

La energía interna complementaria  $W_{int}^*$  se puede expresar en función de los coeficientes de influencia y de las fuerzas proyectadas, pues en un modelo estructural elástico  $W_{int}^* = W_{ext}$  y se puede escribir:

$$W_{int}^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N F_i \Delta_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \delta_{ij} F_i F_j . \quad (6.24)$$

Esta última expresión es una forma cuadrática que se puede indicar con matrices de la siguiente manera:

$$W_{int}^* = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1N} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{N1} & \delta_{N2} & \dots & \delta_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \{ \mathbf{F} \} \cdot [ \boldsymbol{\delta} ] \{ \mathbf{F} \} . \quad (6.25)$$

Como la forma cuadrática es definida positiva, los términos de la diagonal de la **matriz de coeficientes de influencia** o **matriz de flexibilidad** han de ser positivos, es decir, en toda estructura  $\delta_{ii} > 0$ . Este resultado tiene implicaciones físicas: cuando una estructura se solicita únicamente con una fuerza (generalizada), el desplazamiento (generalizado) efectivo del punto de aplicación ha de ser positivo.

Si definimos la **matriz de rigidez**  $\mathbf{k}$  como la inversa de la matriz de coeficientes de influencia, la energía interna de deformación se puede expresar también de forma matricial:

$$W_{int} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_N \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_N \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\Delta} \} \cdot [ \mathbf{k} ] \{ \boldsymbol{\Delta} \} . \quad (6.26)$$

La matriz  $\mathbf{k}$ , por la inversa de una matriz simétrica, definida positiva, también tiene estas dos propiedades.

## 6. Los teoremas de Castigliano

Los dos teoremas de Castigliano están basados en las expresiones de la energía interna y de la energía interna complementaria para modelos estructurales. En resistencia de materiales y en cálculo de estructuras se emplean constantemente, sobre todo el segundo teorema, para resolver problemas hiperestáticos. Su enunciado es el siguiente:

**Teorema 6.6: (Primer teorema de Castigliano)** *En un modelo estructural en equilibrio, la derivada parcial de la energía  $W_{int}(\Delta_1, \Delta_2, \dots)$  respecto de un desplazamiento efectivo  $\Delta_i$  es igual al módulo de la fuerza generalizada aplicada sobre el punto  $i$ :*

$$F_i = \frac{\partial W_{int}(\Delta_1, \Delta_2, \dots)}{\partial \Delta_i} . \quad (6.27)$$

Y recíprocamente:

**Teorema 6.7:** (*Segundo teorema de Castigliano*) En un modelo estructural en equilibrio, la derivada parcial de la energía complementaria  $W_{int}^*(F_1, F_2, \dots)$  respecto del módulo de una fuerza generalizada  $F_i$  es igual al desplazamiento efectivo conjugado con dicha fuerza:

$$\Delta_i = \frac{\partial W_{int}^*(F_1, F_2, \dots)}{\partial F_i} . \quad (6.28)$$

DEMOSTRACIÓN: Las demostraciones de estos dos teoremas se obtienen fácilmente a partir de las expresiones de la energía interna y la energía interna complementaria en función de los coeficientes de rigidez y de influencia. En el primer caso, calculamos

$$\frac{\partial}{\partial \Delta_i} W_{int}(\Delta_1, \Delta_2, \dots) = \frac{\partial}{\partial \Delta_i} \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^N k_{ab} \Delta_a \Delta_b = \sum_{b=1}^N k_{ib} \Delta_b , \quad (6.29)$$

que coincide con la expresión del módulo de la fuerza generalizada  $F_a$ , lo que demuestra el primer teorema. De forma análoga, derivando la expresión de la energía complementaria se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial F_i} W_{int}^*(F_1, F_2, \dots) = \frac{\partial}{\partial F_i} \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^N \delta_{ab} F_a F_b = \sum_{b=1}^N \delta_{ib} F_b , \quad (6.30)$$

que coincide ahora con el desplazamiento efectivo  $\Delta_i$ , demostrando el segundo teorema. ■

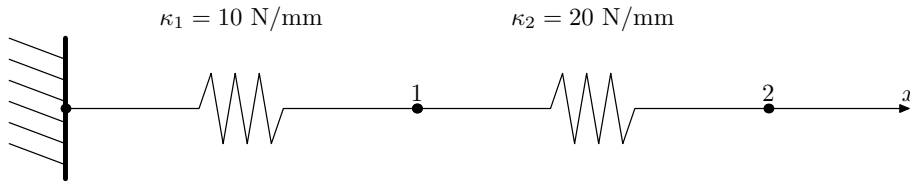
En la aplicación de estos teoremas se comprueba que la energía interna y su complementaria, aunque de valor idéntico en el caso elástico, no son intercambiables. Más concretamente, si utilizamos la energía interna  $W_{int}$  en el segundo teorema de Castigliano, por ejemplo, en vez de la energía complementaria obtendríamos el resultado

$$\Delta_i = \frac{\partial W_{int}(\Delta_1, \Delta_2, \dots)}{\partial F_i} = 0 , \quad (6.31)$$

que es absurdo.

## 7. Problemas

6.1 Se propone el siguiente ejemplo para comprobar de forma sencilla la validez del teorema de reciprocidad. Dos muelles elásticos se colocan en serie tal y como indica la figura.

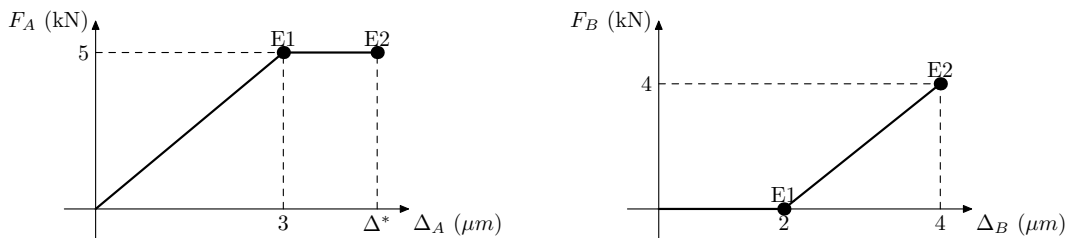


Se consideran dos casos de carga:

- 1) Se aplica una fuerza  $F_1 = 1 \text{ N}$  sobre el punto 1 en dirección del eje  $x$  y llamamos  $\Delta_{11}$  al desplazamiento del punto 1 y  $\Delta_{21}$  al desplazamiento del punto 2.
- 2) En segundo lugar se considera el estado de deformación debido a una fuerza  $F_2 = 1 \text{ N}$  sobre el punto 2, y se llama  $\Delta_{21}, \Delta_{22}$  a los desplazamientos sobre los puntos 1 y 2, respectivamente, en este segundo caso.

Comprobar que  $F_1 \cdot \Delta_{12} = F_2 \cdot \Delta_{21}$ .

6.2 En una estructura se escogen dos puntos  $A$  y  $B$  sobre los cuales se aplican fuerzas y se miden desplazamientos efectivos. Sobre la estructura sin deformar se aplica, en primer lugar, una fuerza  $F_A$  en el punto  $A$  y denominamos “estado 1” (E1) al resultante. Sin quitar la fuerza ya aplicada, se añade otra fuerza  $F_B$  sobre el punto  $B$  resultando el “estado 2” (E2). La figura muestra la evolución de los desplazamientos efectivos en  $A$  y  $B$  en función del valor de las fuerzas aplicadas.

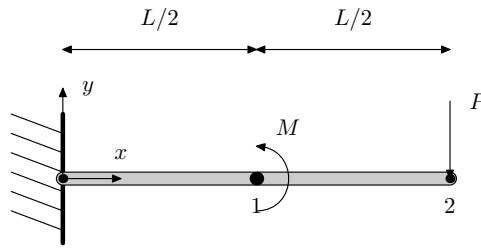


Se pide:

- 1.- Calcular, empleando el teorema de reciprocidad, el valor de  $\Delta^*$ .
- 2.- Dibujar sobre las mismas figuras las curvas fuerzas-desplazamiento que resultarían de quitar primero la fuerza  $F_A$  y después la fuerza  $F_B$ .

**6.3** Una viga empotrada como la de la figura tiene longitud  $L$ . En extremo 2 se aplica una fuerza puntual  $P$  y en el punto medio 1 un momento concentrado  $M$ . El desplazamiento vertical (en dirección del eje  $y$ ) cuando únicamente se aplica la fuerza puntual es:

$$v_P(x) = \frac{-Px^2}{6K}(3L - x), \quad (6.32)$$



siendo  $K$  una constante de rigidez de la viga con dimensiones de  $\text{N m}^2$ . Cuando sólo se aplica el momento concentrado, el desplazamiento vertical es:

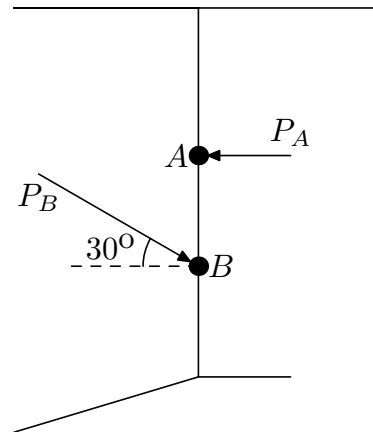
$$v_M(x) = \begin{cases} \frac{Mx^2}{2K} & \text{si } x \leq L/2 \\ \frac{ML}{4K}(2x - L/2) & \text{si } x \geq L/2 \end{cases} \quad (6.33)$$

Se pide:

- 1) Calcular  $\Delta_{12}$ , el giro que se produce en el punto 1 cuando se aplica una fuerza de valor  $F = 6 \text{ N}$  en el punto 2. (NOTA: el giro, cuando los desplazamientos son pequeños, se puede aproximar por la tangente, es decir  $\theta(x) = v'(x)$ ).
- 2) Calcular  $\Delta_{21}$ , el desplazamiento vertical que se produce en el punto 2 cuando se aplica un par de valor  $M = 5 \text{ Nm}$  en el punto 1.
- 3) Comprobar el teorema de Maxwell-Betti con los dos resultados anteriores.
- 4) Calcular los cuatro coeficientes de influencia de la estructura, indicando sus dimensiones.

**6.4** Una estructura elástica y plana, de la cual se dibuja sólo una parte, se encuentra sometida a la acción de dos fuerzas puntuales  $P_A, P_B$  aplicadas sobre los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente, con la dirección y sentido indicados en la figura.

Cuando se aplica una carga puntual  $P_A = 3 \cdot 10^3$  N, el punto  $A$  se desplaza 3 mm hacia la izquierda y el punto  $B$ , 2 mm hacia la izquierda y 1 mm hacia abajo. Cuando se aplica únicamente una fuerza  $P_B = 7 \cdot 10^3$  N, el punto  $B$  tiene un desplazamiento efectivo cuyo módulo es 4 mm.



- 1) ¿En qué dirección y sentido es el desplazamiento del punto  $B$  en este último caso de carga? ¿Por qué?
- 2) Encontrar los 4 coeficientes de influencia del sistema, indicando sus dimensiones.
- 3) ¿Cuánto vale (y en qué sentido) el desplazamiento horizontal del punto  $A$  cuando se aplica una fuerza sobre él de valor  $P_A = 2 \cdot 10^3$  N y otra de valor  $P_B = -3 \cdot 10^3$  N sobre el punto  $B$ ?

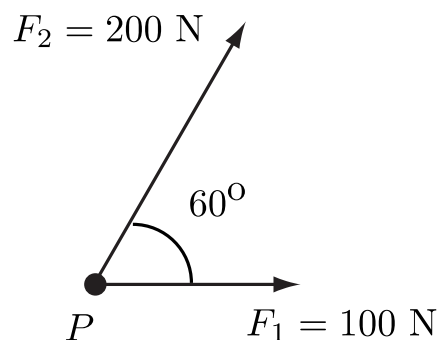
**6.5** Sobre un punto de una estructura se aplican dos fuerzas como se indica en la figura. Se conocen los siguientes coeficientes de influencia:

$$\delta_{11} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mm/N} ,$$

$$\delta_{22} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ mm/N} ,$$

$$\delta_{12} = 10^{-2} \text{ mm/N} .$$

1. Encontrar el desplazamientos efectivo en la dirección de cada una de las fuerzas.
2. Encontrar gráficamente la posición del punto deformado después de la aplicación de las dos fuerzas (usa la escala que creas más conveniente).



**6.6** Se consideran dos muelles elásticos de constantes  $k_1, k_2$  siendo el primero más rígido que el segundo. Ambos muelles tiene un extremo sujeto y el otro libre.

- 1) Si se aplica una fuerza de tracción  $F$  igual a ambos muelles, ¿Cuál almacena más energía elástica?
- 2) Si el extremo libre de cada uno de los muelles se desplaza una distancia  $\Delta$ , ¿cuál almacena más energía elástica?
- 3) ¿Cómo se almacena más energía elástica en un muelle, sometiéndolo a una fuerza de tracción o a una de compresión? (iguales en módulo).
- 4) ¿Cómo colocarías los muelles (en serie o en paralelo) para que almacenaran la mayor cantidad posible de energía cuando se aplica una única fuerza  $F$  en el extremo libre? ¿Y si se aplica un desplazamiento sobre el extremo libre?

**6.7** Demuestra que la energía elástica almacenada en un cuerpo homogéneo sometido a una presión hidrostática uniforme  $p$  es

$$W = \frac{V}{2K} p^2 ,$$

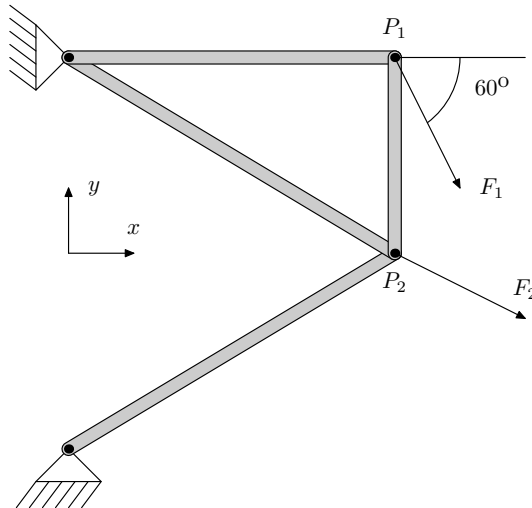
siendo  $K$  la rigidez volumétrica del material y  $V$  el volumen del cuerpo.

**6.8** En la estructura de la figura se conocen los siguientes coeficientes de influencia:

$$\delta_{11} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mm/N} ,$$

$$\delta_{21} = 10^{-3} \text{ mm/N} .$$

Calcular el *vector de desplazamiento* del punto  $P_1$  cuando se aplican cargas de valor  $F_1 = 1000 \text{ N}$  y  $F_2 = 2000 \text{ N}$ , sabiendo que la componente horizontal de dicho desplazamiento es  $u_x(P_1) = 3 \text{ mm}$ .





**6.9** Una estructura elástica está sometida a dos fuerzas puntuales  $F_1, F_2$ . Sobre cada una de los puntos, y en la dirección de la fuerza correspondiente, se definen desplazamientos efectivos  $\Delta_1, \Delta_2$ . La matriz de coeficientes de influencia es:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ mm/kN} .$$

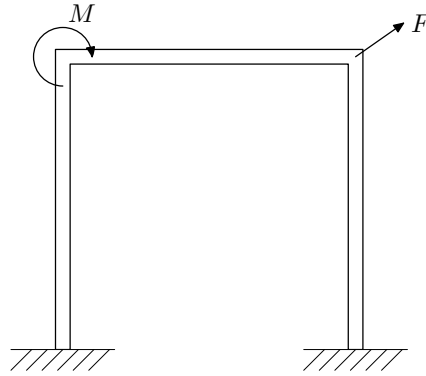
- 1) Indicar la expresión analítica de la energía potencial interna complementaria  $U^*(F_1, F_2)$ , como una función únicamente de las fuerzas aplicadas.
- 2) Encontrar los desplazamiento efectivos  $\Delta_1, \Delta_2$  que aparecen cuando se aplican fuerzas  $F_1 = 3 \text{ KN}$ ,  $F_2 = 5 \text{ KN}$ .
- 3) Calcular el trabajo  $W_{ext}$  realizado por las fuerzas externas indicadas.
- 4) Comprobar que el trabajo externo es igual a la energía potencial elástica almacenada en el cuerpo.

**6.10** Considera un paralelepípedo de lados  $L_x, L_y, L_z$  paralelos a los ejes coordenados. Si las caras perpendiculares al eje  $x$  están sometidas a una fuerza por unidad de superficie de valor  $f$ , demuestra que la energía de deformación del paralelepípedo es

$$W_{int} = \frac{1}{2} K \delta^2 ,$$

siendo  $= EA/L_x$ ,  $A = L_y \cdot L_z$  y  $\delta = fA/K$ .

**6.11** En una estructura como la de la figura actúa una fuerza puntual y un momento concentrado, en la dirección y sentido indicados. Cuando actúa una fuerza de valor  $F = 10^4$  N, se sabe que el desplazamiento efectivo bajo la fuerza es de 5mm y el giro efectivo bajo el momento es de  $10^{-3}$  rad, que es en sentido opuesto al momento de la figura. Cuando se aplica únicamente un par de valor  $M = 1000$  N m se sabe que el giro bajo  $M$  es de  $10^{-2}$  rad. Determinar el valor de los cuatro coeficientes de influencia indicando claramente sus unidades.



# Capítulo 7

## Estudio de la finalización del comportamiento elástico

---

Hasta ahora en el curso nos hemos limitado a estudiar el comportamiento elástico de los materiales, obteniendo resultados energéticos y teoremas cuya aplicación se limita a dicho rango. Todos los materiales poseen un rango elástico limitado, y por tanto, para estar seguros de que bajo las sollicitaciones consideradas el material sigue siendo elástico estudiamos en este capítulo cómo detectar cuando se agota dicho régimen. El objetivo no es, por tanto, el estudio de la inelasticidad, o de la fractura, que son el objeto de otras materias relacionadas. En este capítulo nos limitaremos a estudiar modelos que nos informen de la validez de las hipótesis de la

elasticidad y, más aún, que nos proporcionen algo de información sobre cuánto de lejos está cada punto material del final del rango elástico. Todos estos objetivos se estudian distinguiendo los materiales dúctiles de los frágiles porque no hay un único modelo que se adapte bien a todos los tipos de materiales.

## 1. Criterios de fallo

Los sólidos salen del régimen de comportamiento elástico por motivos muy distintos, dependiendo de la microestructura de los materiales que los constituyen. Por ejemplo, los metales dejan de ser elásticos cuando plastifican debido a la nucleación de dislocaciones en la red cristalina de cada grano. Los polímeros también salen del régimen elástico, pero en este caso se debe a desenrollamiento de cadenas poliméricas. Por último, los materiales cerámicos o el hormigón dejan de ser elásticos debido a la aparición de microfisuras. Por unificar conceptos, llamaremos *fallo* a la finalización del comportamiento elástico de un material, independientemente del micromecanismo responsable del mismo.

Un *criterio de fallo* es un modelo matemático que intenta explicar cuándo se inicia el fallo de un punto material a partir del estado de tensiones y/o deformaciones del mismo. Aunque están “inspirados” en la micromecánica de los materiales, los criterios de fallo son sólo fórmulas sencillas que, con uno o varios parámetros, ajustan los resultados experimentales de la mejor forma posible. No hay ningún criterio de fallo exacto para todo estado tensional  $\mathbf{T}$ .

En este curso estudiaremos criterios de fallo de la forma  $f(\mathbf{T}) \leq 0$ . Cuando la función  $f(\mathbf{T})$  es negativa, el punto se encuentra en régimen elástico. Cuando  $f(\mathbf{T}) = 0$ , el criterio predice que se produce el fallo. Lo que ocurre si  $f > 0$  no tiene interés porque el criterio no proporciona entonces información útil. Cuando el valor de  $f(\mathbf{T})$  es negativo, su módulo indica, la “distancia” que está el punto del fallo. Aunque no lo definamos con precisión, si  $f(\mathbf{T}_1) < f(\mathbf{T}_2)$ , entonces el estado  $\mathbf{T}_1$  está más lejos del fallo que el estado  $\mathbf{T}_2$ .

Por simplificar más aún los criterios de fallo, nos basaremos en el ensayo de tracción/compresión pura para definir los criterios de fallo. En un material dúctil, sabemos que el fallo plástico ocurre cuando la tensión alcanza el límite elástico  $\sigma_e$ ; en cambio, un material frágil falla cuando la tensión alcanza el valor  $\sigma_r$ , la tensión de rotura. Si definimos la tensión última  $\sigma_u$  al límite elástico, si el material es dúctil, o la tensión de rotura, si el material es frágil, consideraremos en este curso criterios

de fallo siempre de la forma:

$$f(\mathbf{T}) = \sigma_{eq}(\mathbf{T}) - \sigma_u , \quad (7.1)$$

siendo  $\sigma_{eq}$  un escalar que denominamos la *tensión equivalente* y que siempre ha de definirse de acuerdo a un criterio de fallo.

Para cuantificar la severidad de un estado tensional respecto de un criterio de fallo, se define el *coeficiente de seguridad* del estado tensional  $\mathbf{T}$  respecto al criterio de fallo  $f$  como el escalar  $n$  tal que

$$f(n\mathbf{T}) = 0 . \quad (7.2)$$

De acuerdo a las dos definiciones anteriores, la tensión equivalente  $\sigma_{eq}(\mathbf{T})$  es aquella tensión que en un ensayo de tracción/compresión pura tendría el mismo coeficiente de seguridad que  $\mathbf{T}$ .

Un criterio de fallo no puede depender de  $\mathbf{T}$  de cualquier manera. Para que éste sea físicamente correcto, por ejemplo, no puede ser una función de las componentes de la matriz asociada a  $\mathbf{T}$  que dependa del sistema de coordenadas escogido. Expresado de otra manera, la función  $f$  sólo puede depender de invariantes de  $\mathbf{T}$  y si además, es isótropa, no puede depender de ninguna dirección. Existen infinitos invariantes del tensor tensión, pero sólo se pueden escoger tres que sean funcionalmente independientes. Típicamente se escogen, bien los invariantes principales descritos en el capítulo 1, o bien las tres tensiones principales. Por unificar conceptos utilizaremos siempre estas tres últimas y, abusando de la notación, escribiremos:

$$f(\mathbf{T}) = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \sigma_u . \quad (7.3)$$

## 2. Criterios de fluencia para materiales dúctiles

Independientemente de los micromecanismos responsables de la finalización del comportamiento elástico en los materiales dúctiles, estos se caracterizan por una rama plástica muy larga hasta el fallo definitivo. Por ello, todos los criterios de fallo de materiales dúctiles se llaman *criterios de fluencia*.

Entre los materiales dúctiles, los más comunes son los metales. Existen varios criterios para modelar su fallo y a continuación describimos los dos más habituales.

## 2.1. El criterio de Tresca

El criterio de Tresca (1814-1885) se basa en una serie de experimentos llevados a cabo entre 1864 y 1873 por dicho ingeniero francés. En ellos, Tresca estudió la deformación plástica y el punzonamiento de placas y cilindros de plomo, cobre, parafina, hielo, ... Los informes de estos experimentos fueron, durante 80 años, los más completos sobre el tema de plasticidad. En ellos se describen, por primera vez, el régimen elástico, el endurecimiento plástico y la fluencia de los metales. Sobre este último aspecto, además de identificar por vez primera que los metales fluyen como líquidos, de forma isocórica, demostró que esto ocurre siempre bajo un estado tensional en el que la tensión tangencial máxima tiene un valor característico, constante para cada material. Como en un ensayo de tracción pura la tensión tangencial máxima toma el valor  $\sigma/2$  propuso la siguiente función de fluencia:

$$f_{Tresca}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_{eq}^{Tresca}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \sigma_e, \quad \text{y} \quad \sigma_{eq}^{Tresca}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (7.4)$$

## 2.2. El criterio de von Mises

El segundo criterio de fluencia que consideramos fue formulado por Maxwell hacia 1865, pero se suele atribuir a von Mises (1883–1953) que lo publicó en 1913. La motivación para este criterio también se encuentra en el comportamiento de los metales y expresa matemáticamente que la plasticidad ocurre cuando la energía de distorsión alcanza un umbral característico del material.

La energía de distorsión es la energía que tiene la parte desviadora de la tensión definida como  $\mathbf{s} = \mathbf{T} + p_m \mathbf{1}$  con  $p_m = -e \frac{1}{3} \text{tr}[\mathbf{T}]$ . En un ensayo de tracción pura, el valor de esta energía cuando se alcanza el límite elástico se puede calcular y es  $(1 + \nu)/(3E)\sigma_e^2$ . Calculando también esta energía en función de las tensiones principales se puede establecer la siguiente función de fluencia:

$$f_{vM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_{eq}^{vM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \sigma_e, \quad (7.5)$$

siendo la tensión equivalente respecto al criterio de von Mises igual a

$$\sigma_{eq}^{vM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (7.6)$$

**Ejemplo 2.1:** Un punto de un cuerpo deformable dúctil está sometido a un estado tensional cuya matriz asociada, en un sistema de referencia cartesiano, es

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \text{ MPa} . \quad (7.7)$$

Calcular la tensión equivalente en el punto según los criterios de Tresca y von Mises. Si se sabe que el límite elástico del material es  $\sigma_e = 80$  MPa, calcular además el factor de seguridad del estado tensional anterior según cada uno de los dos criterios indicados.

Las tensiones principales de este estado tensional son

$$\sigma_1 = 15 + 5\sqrt{5} \text{ MPa} , \quad \sigma_2 = 15 \text{ MPa} , \quad \sigma_3 = 15 - 5\sqrt{5} \text{ MPa} . \quad (7.8)$$

Las tensiones equivalentes según los criterios de Tresca y von Mises son:

$$\sigma_{eq}^{Tr} = 10\sqrt{5} = 22.36 \text{ MPa} , \quad \sigma_{eq}^{vM} = 19.37 \text{ MPa} . \quad (7.9)$$

En cada caso, el factor de seguridad es

$$n_{Tr} = \frac{80}{22.36} = 3.58 , \quad n_{vM} = \frac{80}{19.37} = 4.13 . \quad (7.10)$$

△

### 3. Criterios de rotura para materiales frágiles

Los materiales frágiles fallan de forma súbita, sin aparente fluencia, y por ello los criterios de fallo se denominan ***criterios de rotura***. Además, otra característica que distingue los materiales frágiles de los dúctiles es su habitual anisotropía pues resisten mucho más a compresión que a tracción.

#### 3.1. El criterio de Rankine

El criterio de Rankine predice que un punto material falla cuando, bien la tensión principal mayor  $\sigma_1$  alcanza la tensión de rotura a tracción  $\sigma_{rt}$ , o bien la menor tensión principal  $\sigma_3$  alcanza la tensión de rotura a compresión  $\sigma_{rc}$ .

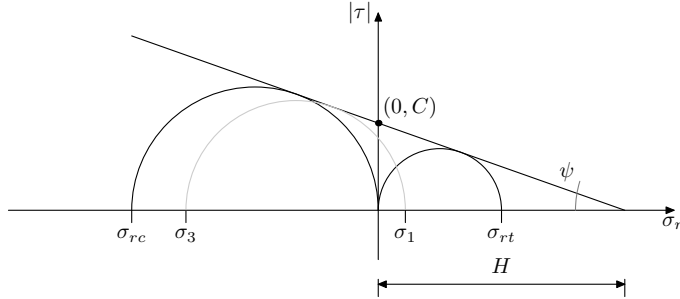


Figura 7.1: Representación gráfica del criterio de Mohr-Coulomb.

Matemáticamente el criterio de Rankine se puede expresar como

$$\begin{aligned} f_{Rankine}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= \sigma_{eq}^{Rankine}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \sigma_{rt}, \quad y \\ \sigma_{eq}^{Rankine}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= \max(\sigma_1, \sigma_{rt} - \sigma_3 - |\sigma_{rc}|) \end{aligned} \quad (7.11)$$

### 3.2. El criterio de Mohr-Coulomb

La motivación para el criterio de Mohr-Coulomb surge de la observación experimental que indica la resistencia al cortante de ciertos materiales es sensible a la presión media. Este tipo de comportamiento se asemeja a la ley de Coulomb de la fricción y fue Mohr en 1882 quien notó que la condición de fallo en este caso coincide con el instante en el que el mayor círculo de Mohr es tangente a una recta, denominada la recta característica del material.

Como se puede apreciar en la Figura 7.1, la recta característica interseca el eje vertical del diagrama de Mohr en el punto  $(0, C)$ . La constante  $C$  del material indica su resistencia a cortante cuando la tensión normal es nula y se llama por ello la **cohesión** del mismo. El ángulo  $\phi$  determina cuánto crece la resistencia a la cortadura en función de la tensión normal. Por analogía con la ley de Coulomb del rozamiento, esta constante material se llama el **ángulo de fricción** del material.

En la figura Figura 7.1 se observa que los estado tensionales correspondientes a los estados de tensión y compresión pura en el punto de rotura son tangentes a la



recta característica del material. Por tanto se puede escribir:

$$\text{sen } \phi = \frac{\sigma_{rt}/2}{H - \sigma_{rt}/2}, \quad \text{y también} \quad \text{sen } \phi = \frac{|\sigma_{rc}|/2}{H + |\sigma_{rc}|/2}. \quad (7.12)$$

Igualando ambas expresiones del seno del ángulo de fricción se obtiene que

$$H = \frac{\sigma_{rt}}{1 - k}, \quad \text{con} \quad k = \frac{\sigma_{rt}}{|\sigma_{rc}|}. \quad (7.13)$$

Una vez obtenida el valor de la tensión  $H$  para la cual el material no resiste ningún esfuerzo tangencial, se puede despejar el valor del seno del ángulo de fricción como:

$$\text{sen } \phi = \frac{1 - k}{1 + k}. \quad (7.14)$$

Por último, y también a partir de la Figura 7.1, se puede escribir que, en cualquier estado de fallo se ha de verificar:

$$\text{sen } \phi = \frac{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}{H - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}. \quad (7.15)$$

Y sustituyendo los valores de  $\text{sen } \phi$  y  $H$  obtenidos, respectivamente, en (7.14) y (7.13) resulta que en cualquier estado de fallo:

$$\sigma_1 - k\sigma_3 - \sigma_{rt} = 0. \quad (7.16)$$

Concluimos que la función de fluencia para el criterio de Mohr-Coulomb se puede escribir como:

$$f_{MC}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_{eq}^{MC}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \sigma_{rt}, \quad \text{y} \quad \sigma_{eq}^{MC}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1 - k\sigma_3. \quad (7.17)$$

En el caso en el  $\sigma_{rt} = \sigma_{rc}$  el criterio de Mohr-Coulomb coincide con el de Tresca.

### 3.3. El criterio de Drucker-Prager

De la misma manera que el criterio de Mohr-Coulomb generaliza el criterio de Tresca introduciendo una dependencia de la resistencia con la presión, Drucker y Prager en 1950 propusieron una extensión del criterio de von Mises para capturar el mismo efecto. La función de fallo en este caso es de la forma

$$f_{DP}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \|\text{dev } \mathbf{T}\| - \alpha p - K, \quad (7.18)$$

**Ejemplo 3.2:** Un sólido está sometido a una sollicitación de forma que en un punto el estado tensional se puede expresar, en una base cartesiana, como

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 10 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ MPa .} \quad (7.19)$$

La tensión de rotura a tracción del material es  $\sigma_{rt} = 10$  MPa y la de compresión es  $\sigma_{rc} = 40$  MPa. Calcular la tensión equivalente en el punto según los criterios de Rankine y de Mohr y los factores de seguridad en cada caso. Dibujar el diagrama de Mohr del estado tensional en el punto y los diagramas de los estados tensionales cuando la tensión es  $\mathbf{T}' = n\mathbf{T}$ , siendo  $n$  cada uno de los coeficientes de seguridad previamente calculados.  $\triangle$

## 4. Problemas

**7.1** Suponiendo que  $\sigma_{et} < |\sigma_{ec}|$ , determinar en función de  $\sigma_{et}$  y de  $k = \sigma_{et}/|\sigma_{ec}|$  el punto de intersección de la recta característica de un material con el eje horizontal y el ángulo  $\phi$  que forma con el mismo. (Pista: considera un estado esférico de tensión y encuentra el valor de la presión cuando se produce el fallo).

Demostrar además que un punto material falla, de acuerdo con el criterio de Mohr-Coulomb, cuando existe un plano en el que la tensión tangencial alcanza el valor

$$\tau = C - \sigma_n \tan \phi .$$

(NOTA:  $C$  y  $\phi$  se llaman, respectivamente, la cohesión y el ángulo de fricción del material)

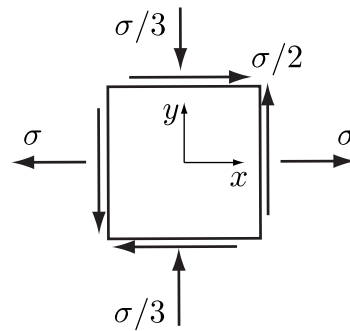
**7.2** Razona las siguientes cuestiones:

- 1) Un material es tal que, cuando se ensaya mediante un ensayo a tracción pura, el criterio de Rankine, el de Tresca y el de von Mises predicen el mismo valor para la tensión normal última. Sin embargo, si el ensayo es de cortante, cada uno de los modelos predice una tensión última distinta. ¿Cómo es eso posible? ¿Cuál de todas las predicciones es la correcta?
- 2) Un sólido se somete a un estado hidrostático de tensión  $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$ . ¿Cuál es la presión última según el criterio de von Mises? Comenta la respuesta.

- 3) Sea  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \widehat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - C$  una función de fluencia. Podemos elegir un valor de la constante  $C$  de forma que el criterio prediga exactamente la tensión de plastificación en el ensayo de tracción y de forma aproximada la tensión de plastificación en el ensayo de cortante puro, o viceversa. En general, estos dos valores de la constante  $C$  serán distintos. ¿Cuál es mejor? ¿Cuál es más exacto?.
- 4) ¿Por qué un criterio de fluencia de la forma  $f(\mathbf{T}) = \sigma_{xx} - \sigma_{yy}$  es inaceptable?
- 5) Si tuvieras un material específico con el que construir una pieza mecánica, o una estructura, ¿Cuál criterio de fallo escogerías y por qué?

**7.3** Un punto de un sólido se encuentra en un estado de tensión plana descrito por el esquema de la figura ( $\sigma > 0$ ).

1. Dibuja el diagrama de Mohr.
2. Encuentra la expresión del tensor de tensiones en el sistema de coordenadas  $xyz$ .
3. Si el material tiene un límite elástico  $\sigma_e$ , encontrar el factor de seguridad de dicho estado tensional según los criterios de Tresca y von Mises.
4. Si el límite de rotura a compresión es  $\sigma_{rc} = 1,2\sigma_r$ , ¿cuál es el factor de seguridad según los criterios de Mohr y de Rankine?



**7.4** Un punto de un sólido deformable se encuentra sometido a un estado de tensión que, en un sistema de coordenadas dado se expresa como:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 30 & 5 & 0 \\ 5 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad (7.20)$$

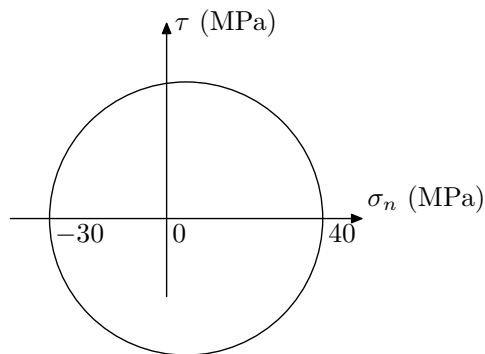
- 1) Dibuja los círculos de Mohr de este estado tensional.
- 2) Encuentra la tensión equivalente al estado tensional (7.20) según los criterios de Rankine, Tresca, von Mises y Mohr simplificado ( $\sigma_{rt}/\sigma_{rc} = 0,8$ ).

- 3) Si el límite elástico a tracción del material es de 50 MPa, calcula los coeficientes de seguridad del estado tensional según los mismos criterios que en el apartado anterior.
- 4) Dibuja los tres círculos de Mohr en el estado tensional  $n \cdot \mathbf{T}$ , siendo  $n$  el factor de seguridad obtenido con el criterio de Tresca. Repite el dibujo siendo  $n$  ahora el factor de seguridad que resulta de emplear el criterio de Mohr simplificado. Comprueba en este caso que el mayor de los círculos de Mohr es tangente a la recta característica del material.

**7.5** El fallo de un punto material se estudia con el criterio de Mohr. Se sabe que la cohesión de dicho material es  $C = 12$  MPa y el ángulo de fricción es  $\theta = 30^\circ$ . Si las tensiones principales en ese punto son  $\sigma_1 = 5$  MPa,  $\sigma_2 = 3$  MPa y  $\sigma_3 = 0$  MPa, encontrar gráficamente el coeficiente de seguridad en el punto respecto al criterio de fallo indicado.

**7.6** El estado tensional en un punto es plano y su diagrama de Mohr aparece en el la figura. Calcular, sabiendo que el límite elástico es  $\sigma_e = 180$  MPa:

- 1) La tensión equivalente según el criterio de von Mises y el coeficiente de seguridad asociado.
- 2) La tensión equivalente según el criterio de Tresca y el coeficiente de seguridad asociado.



**7.7** Se desea emplear el criterio de Mohr-Coulomb para estudiar la rotura de un material frágil. Se sabe que el ángulo de fricción de dicho material es  $\phi = 30^\circ$  y que, al someter una probeta a un ensayo de cortante puro, la tensión tangencial en el instante del fallo es  $\tau_r = 10$  MPa. Determinar la cohesión del material.

# Bibliografía

---

- [1] M. E. Gurtin. The linear theory of elasticity. VIa/2, 1972.
- [2] K D Hjelmstad. *Structural mechanics*. Springer Science+Business Media, second edition, 2005.
- [3] A E H Love. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 1927.
- [4] L E Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- [5] G E Mase. *Continuum Mechanics*. McGraw-Hill, 1970.
- [6] X Oliver and C Agelet de Saracibar. *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Ediciones UPC, 2000.
- [7] R Stenberg. On Saint-Venant's principle. *Q J Appl Mech*, 11:393–402, 1954.
- [8] A M Stuart and O Gonzalez. *A first course in continuum mechanics*. Cambridge University Press, 2008.
- [9] Kyūichirō Washizu. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon, 1982.