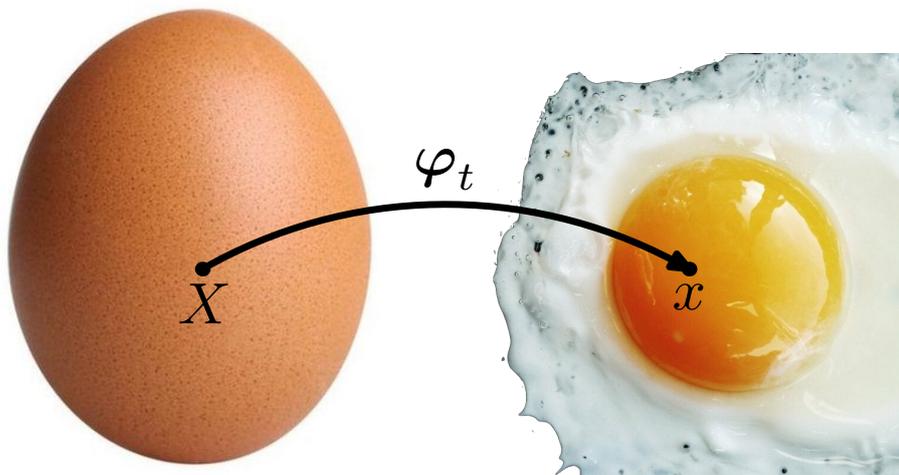


Mecánica de medios continuos



Ignacio Romero Olleros
Dpto. Ingeniería Mecánica
E.T.S.I. Industriales
Universidad Politécnica de Madrid
ignacio.romero@upm.es

28 de enero de 2025

Índice general

1. Fundamentos matemáticos	1
1.1. Puntos en espacio	1
1.2. Vectores en el espacio Euclídeo	2
1.2.1. Componentes de un vector y cambio de base	3
1.2.2. Operaciones algebraicas básicas	4
1.3. Tensores	8
1.3.1. Tensores de segundo orden	9
1.3.2. Componentes y cambio de base	9
1.3.3. Algunos tensores especiales	11
1.4. Tensores de rotación	12
1.4.1. Operaciones algebraicas	12
1.4.2. Autovectores y autovalores	15
1.4.3. Funciones de tensores	17
1.4.4. Descomposiciones de tensores	17
1.5. Tensores de dos puntos	18
1.6. Tensores de cuarto orden	19
1.7. Cálculo vectorial y tensorial	20
1.8. Notación indicial	23
1.8.1. Aplicación: derivadas de los invariantes principales	27
1.9. La transformada de Legendre	28
1.10. Cálculo variacional	29
1.11. Linealización	31
2. Cinemática de medios continuos	41
2.1. Los cuerpos continuos y sus configuraciones	41
2.2. El campo de deformación de un medio continuo	43
2.2.1. Operadores diferenciales en las dos configuraciones	45
2.3. El gradiente de deformación	47
2.4. Descomposición polar del gradiente de deformaciones	49
2.5. Medidas locales de deformación	50
2.5.1. Deformaciones generalizadas	51
2.6. Transformación de longitud, superficie y volumen	53
2.6.1. Transformación de longitud y ángulo	53

2.6.2.	Transformación de área	55
2.6.3.	Transformación de volumen	55
2.7.	Deformaciones de sólido rígido	56
2.8.	Deformaciones homogéneas	57
2.9.	Deformaciones infinitesimales	58
2.9.1.	Deformaciones infinitesimales rígidas	60
2.10.	Movimientos	61
2.11.	Descripción material y espacial	61
2.12.	Velocidad y aceleración	62
2.13.	Tasas tensoriales	63
2.A.	El determinante del gradiente de deformación	64
3.	Fuerzas sobre un medio continuo	73
3.1.	Fuerzas exteriores e interiores	73
3.2.	El tensor de tensiones	75
3.2.1.	Interpretación física de las componentes del tensor de tensiones	77
3.2.2.	Descomposición del tensor de tensiones	78
3.3.	Tensiones principales	78
3.4.	Estados tensionales sencillos	79
3.5.	Otros tensores de tensión	79
4.	Leyes de balance y conservación	85
4.1.	Curvas, superficies y volúmenes materiales	85
4.1.1.	Derivadas de integrales sobre conjuntos materiales	87
4.1.2.	Teorema del transporte de Reynolds	88
4.2.	Curvas, superficies y volúmenes de control	88
4.2.1.	Flujo a través de una superficie de control	89
4.3.	Balance de masa	89
4.3.1.	Expresión integral de la conservación de masa	90
4.3.2.	Expresión diferencial lagrangiana del principio de conservación de masa	90
4.3.3.	Expresión diferencial euleriana. Ecuación de continuidad	91
4.3.4.	Balance de masa en un volumen de control	91
4.3.5.	Incompresibilidad	92
4.4.	Balance de cantidad de movimiento	93
4.4.1.	Expresión integral del balance de cantidad de movimiento	94
4.4.2.	Expresión diferencial euleriana del balance de cantidad de movimiento	95
4.4.3.	Expresión diferencial lagrangiana del balance de cantidad de movimiento	95
4.5.	Balance de momento cinético	96
4.5.1.	Expresión integral del balance del momento cinético	97

4.5.2.	Expresión diferencial del balance de momento cinético	98
4.6.	Balance de energía	99
4.6.1.	El teorema de las fuerzas vivas	99
4.6.2.	Expresión lagrangiana del teorema de las fuerzas vivas	100
4.6.3.	El primer principio de la termodinámica	101
4.7.	La segunda ley de la termodinámica	104
4.7.1.	Formulaciones integrales	104
4.7.2.	Formulaciones locales	105
5.	Modelos constitutivos	113
5.1.	Principios generales de los modelos constitutivos	114
5.2.	El principio de invariancia	115
5.3.	Modelos constitutivos reducidos	118
5.4.	Simetrías	119
5.4.1.	Funciones isótropas	119
5.5.	Clasificación de los modelos constitutivos	120
6.	Mecánica de fluidos	123
6.1.	Cinemática	124
6.1.1.	Velocidad y aceleración	124
6.1.2.	Líneas de corriente y trayectorias	124
6.1.3.	Vorticidad	125
6.2.	Fluidos perfectos	127
6.2.1.	Las ecuaciones de Euler para fluidos perfectos incompresibles	128
6.2.2.	El teorema de Bernoulli en fluidos perfectos	128
6.2.3.	Aspectos energéticos	130
6.2.4.	Fluidos barotrópicos	130
6.3.	Fluidos newtonianos	131
6.3.1.	Las ecuaciones de Navier-Stokes	132
6.3.2.	Aspectos energéticos	133
6.3.3.	El número de Reynolds y el flujo de Stokes	133
6.3.4.	Fluido newtoniano con transmisión de calor	134
6.4.	Fluidos no newtonianos	134
6.5.	Hidrostática	135
6.5.1.	Presión hidrostática debida a la gravedad	135
6.5.2.	El principio de Arquímedes	136
6.6.	Condiciones de contorno en fluidos	136
7.	Mecánica de sólidos	143
7.1.	Elasticidad	143
7.2.	Hiperelasticidad	144
7.2.1.	Materiales elásticos e isótropos	145
7.2.2.	Modelos desacoplados	146

7.2.3. Material neoohookeano	146
7.2.4. Material de Moony-Rivlin	147
7.3. Incompresibilidad	147
7.4. Formulación completa del problema	148
7.5. Formulación variacional de la elasto-estática	148
7.6. El principio de los trabajos virtuales	150
8. Modelos lineales	157
8.1. Linealización de la cinemática	157
8.2. Linealización de la ley de balance de energía	159
8.3. Linealización de la ley de balance de cantidad de movimiento	160
A. Coordenadas cilíndricas	161
A.1. Elementos de integración	162
A.2. Operador gradiente	162
A.3. Operador divergencia	164
A.4. Tensor de deformación infinitesimal	164
A.5. Problemas axisimétricos	164
B. Coordenadas esféricas	165
B.1. Elementos de integración	166
B.2. Operador gradiente	167
B.3. Operador divergencia	168
Índice alfabético	169

Capítulo 1

Fundamentos matemáticos

La mecánica de medios continuos es una teoría de campos y su presentación actual hace uso extenso de conceptos matemáticos. Así, en los libros más avanzados de esta disciplina se emplean nociones de topología, geometría diferencial en variedades, análisis funcional, teoría de grupos, formas diferenciales, cálculo directo de variaciones, etc. Es por ello por lo que la mecánica de medios continuos resulta de interés a ingenieros, que la emplean como base de métodos de cálculo en sólidos y fluidos, pero también a matemáticos que encuentran en ella un entorno para la aplicación, casi directa, de conceptos aparentemente abstractos.

En estos apuntes no se pretende explorar los aspectos más avanzados de los fundamentos matemáticos de la mecánica de medios continuos, pero sí aprovechar la elegancia y la capacidad de expresión que las matemáticas confieren a esta materia. Para expresar de manera más natural los conceptos elementales de la mecánica de medios continuos se vuelve imprescindible, por tanto, presentar el álgebra y cálculo tensorial y algunos conceptos de geometría diferencial, dejando para otros libros los aspectos más complejos [5, 7, 8, 13, 12, 4].

1.1. Puntos en espacio

En este libro estudiaremos problemas en \mathbb{R}^d siendo $d = 1, 2, 3$. A un punto en \mathbb{R}^d se le pueden asociar d números reales llamados **coordenadas** de tal forma que, al menos localmente, existe una biyección suave entre esta colección de números y los puntos en \mathbb{R}^d . Así, si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ se pueden encontrar aplicaciones $\mathbf{x} \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_d)$ que localmente permiten identificar el punto.

Las coordenadas de un punto se agruparán siempre entre paréntesis para distinguirlas de otros objetos como las componentes de un vector. Nótese que no se permiten operaciones como la suma, resta o producto escalar entre puntos puesto que para ello es necesario que los objetos con los que

se operan tenga más estructura. Las coordenadas cartesianas de un punto coinciden con las componentes de su vector de posición y por ello, en cursos más elementales, se usan de forma intercambiable. Pero en general esta identificación no es válida y puede llevar a errores incluso en operaciones muy sencillas.

▷ **Ejemplo 1.1.1.** Considérense los puntos A y B en \mathbb{R}^2 . Ambos están a una distancia d del origen pero, mientras que el punto A está en la parte positiva del eje horizontal, el punto B está en la parte positiva del eje vertical. Calcular el punto medio del segmento \overline{AB} usando coordenadas cartesianas y polares.

En coordenadas cartesianas, $A = (d, 0)$, $B = (0, d)$ y el punto medio es $C = (d/2, d/2) = (A + B)/2$. En coordenadas polares, $A = (d, 0)$, $B = (d, \pi/2)$ y $C = (d/\sqrt{2}, \pi/4) \neq (A + B)/2$. ◁

Una **curva** es una familia uniparamétrica de puntos en el espacio. Dado un parámetro $u \in (a, b)$, las ecuaciones paramétricas de los puntos \mathbf{x} de la curva son de la forma

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(u) = (\hat{x}_1(u), \hat{x}_2(u), \dots, \hat{x}_d(u)) . \quad (1.1)$$

De manera análoga, una **superficie** es un conjunto biparamétrico de puntos en el espacio. Las coordenadas de dichos puntos, que indicamos también como \mathbf{x} , se obtienen a partir de las ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(u, v) = (\hat{x}_1(u, v), \hat{x}_2(u, v), \dots, \hat{x}_d(u, v)) . \quad (1.2)$$

siendo $u \in (a_1, b_1)$, $v \in (a_2, b_2)$ los parámetros de la superficie. Por último, un **volumen** es un conjunto generado por tres parámetros $u \in (a_1, b_1)$, $v \in (a_2, b_2)$, $w \in (a_3, b_3)$ con puntos de coordenadas

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(u, v, w) = (\hat{x}_1(u, v, w), \hat{x}_2(u, v, w), \dots, \hat{x}_d(u, v, w)) . \quad (1.3)$$

1.2. Vectores en el espacio Euclídeo

La definición completa de los conceptos de vector y espacio vectorial se pueden consultar en textos básicos de álgebra lineal. En lo que sigue, llamaremos **vector** simplemente a un elemento de $\mathcal{V} \equiv \mathbb{R}^{\dim}$, siendo $\dim = 3$ en este capítulo, aunque la gran parte de los conceptos que se presentan son válidos también para otras dimensiones.

Notación: Para diferenciar los vectores de los escalares se emplean en la literatura distintas notaciones. Así, dependiendo del libro u autor que se consulte, un mismo vector se puede ver escrito como \mathbf{u} , \bar{u} , \vec{u} , \underline{u} , ... Entre estos símbolos, todos ellos válidos, utilizaremos el primero. Nótese que, salvo que se indique lo contrario, siempre se emplearán letras minúsculas para referirse a vectores.

1.2.1. Componentes de un vector y cambio de base

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una **base** cartesiana de \mathcal{V} . Cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ se puede expresar de la forma

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{\dim} v_i \mathbf{e}_i, \quad (1.4)$$

y v_1, v_2, v_3 se llaman las **componentes** de \mathbf{v} en la base \mathcal{B} . Las componentes de un vector son únicas para una base dada, pero cambian según la base a la cuál se refieren, por lo que no se debe confundir el vector mismo con sus componentes.

Para expresar que la terna v_1, v_2, v_3 son las componentes del vector \mathbf{v} en la base \mathcal{B} escribiremos:

$$\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}}. \quad (1.5)$$

Cuando no hay posibilidad de confusión porque sólo se ha definido una base se emplea la notación

$$\{\mathbf{v}\} = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right\}. \quad (1.6)$$

La relación entre las componentes de un vector, referidas a dos bases distintas se obtiene de la siguiente manera. Sea \mathcal{B} la base anteriormente definida y \mathcal{B}' una nueva base cartesiana formada por los vectores ortonormales $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$. Un vector \mathbf{e}_i cualquiera de la base \mathcal{B} se puede expresar como suma de vectores de la base \mathcal{B}' de la forma:

$$\mathbf{e}_i = a_{i1} \mathbf{e}'_1 + a_{i2} \mathbf{e}'_2 + a_{i3} \mathbf{e}'_3. \quad (1.7)$$

Otro vector cualquiera \mathbf{v} se puede escribir indistintamente como combinación lineal de los elementos de \mathcal{B} o de los de \mathcal{B}' , es decir,

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\dim} v_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{\dim} v'_j \mathbf{e}'_j. \quad (1.8)$$

Sustituyendo la expresión (1.7) e identificando las componentes se obtiene que

$$v'_j = \sum_{i=1}^{\dim} a_{ij} v_i. \quad (1.9)$$

Esta última relación se puede expresar matricialmente como

$$\left\{ \begin{array}{c} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}'} = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right\}_{\mathcal{B}}, \quad (1.10)$$

o de forma compacta

$$\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}'} = [A]^T \{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}} . \quad (1.11)$$

Si las bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' son ortonormales, un concepto que se definirá más adelante, la matriz de cambio de base $[A]$ es una matriz ortogonal, es decir, que verifica $[A]^{-1} = [A]^T$. Más aún, si las dos bases tienen la misma orientación, entonces el determinante de $[A]$ es igual a 1 y por tanto esta matriz es una rotación.

Observaciones:

- a) Es habitual referirse a los vectores de la base cartesiana de $\mathcal{V} \equiv \mathbb{R}^{\dim}$ como $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ y las componentes de un vector \mathbf{v} en dicha base como v_x, v_y, v_z .
- b) En general, existen sistemas de coordenadas con bases que no son ortonormales. En este libro no las consideraremos pues las operaciones (algebraicas y diferenciales) en estos sistemas son mucho más complejas que en el caso ortonormal.

1.2.2. Operaciones algebraicas básicas

Los vectores de \mathbb{R}^{\dim} poseen las **operaciones vectoriales** básicas de suma y multiplicación por un escalar. Para realizar operaciones vectoriales nos vemos obligados a menudo a emplear las componentes de un vector, pero es importante recalcar que el resultado es independiente de la base escogida. Por ejemplo, para calcular el vector $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, utilizamos las componentes de todos ellos en la base \mathcal{B} y podemos emplear la expresión:

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} . \quad (1.12)$$

Además, en el espacio Euclídeo se define el **producto escalar**, una operación bilineal y simétrica, a partir de la **métrica**, esto es, los escalares

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (1.13)$$

con $i, j = 1, 2, 3$ y $g_{ij} = g_{ji}$. Se dice además que una base es ortonormal si su métrica satisface $g_{ij} = \delta_{ij}$, siendo esta última la **delta de Kronecker**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j , \\ 0 & \text{si } i \neq j . \end{cases} \quad (1.14)$$

Por linealidad, el producto escalar de dos vectores cualesquiera \mathbf{a} y \mathbf{b} en una base ortonormal es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 , \quad (1.15)$$

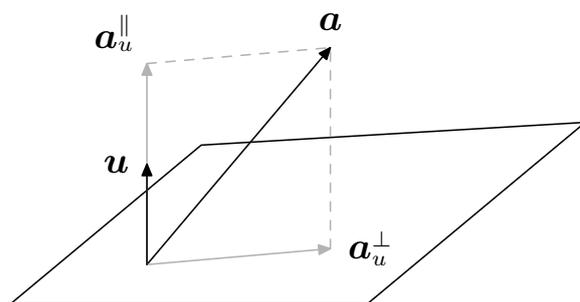


Figura 1.1: Descomposición de un vector según una dirección \mathbf{u} y su plano perpendicular.

siendo a_i, b_i las componentes de ambos vectores en dicha base. El producto escalar, como el resto de operaciones de las que tratamos, es una **operación intrínseca** que no depende de la base escogida. La **norma Euclídea** de un vector se indicará como $|\mathbf{a}|$ y se define de la siguiente forma

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} . \tag{1.16}$$

▷ **Ejemplo 1.2.1.** Demostrar que la norma de un vector es una operación intrínseca.

Sea \mathbf{u} un vector arbitrario y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dos bases cartesianas. Entonces se cumple que la norma al cuadrado de este vector se puede escribir como

$$\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}'}^T \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}'} = ([A]^T \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}})^T ([A]^T \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}) = \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}^T [A][A]^T \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}} = \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}}^T \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{B}} ,$$

ya que la matriz de cambio de base es ortogonal. El resultado de la operación es, por tanto, independiente de la base escogida para representar el vector. Si las dos bases escogidas no fueran ortonormales el resultado también sería cierto pero la matriz de cambio de base no sería ortonormal y por lo tanto la demostración cambiaría ligeramente. ◁

El producto escalar Euclídeo tiene una interpretación geométrica, pues el ángulo formado por dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} es

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} . \tag{1.17}$$

Cualquier vector no nulo se puede normalizar, multiplicándose por el inverso de su norma, y obteniéndose un **vector unitario**. Dado un vector cualquiera \mathbf{a} y otro vector cualquiera unitario \mathbf{u} , se definen la proyección de \mathbf{a} sobre \mathbf{u} y la proyección de \mathbf{a} sobre el plano normal a \mathbf{u} como

$$\mathbf{a}_u^\parallel = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} , \quad \mathbf{a}_u^\perp = \mathbf{a} - \mathbf{a}_u^\parallel . \tag{1.18}$$

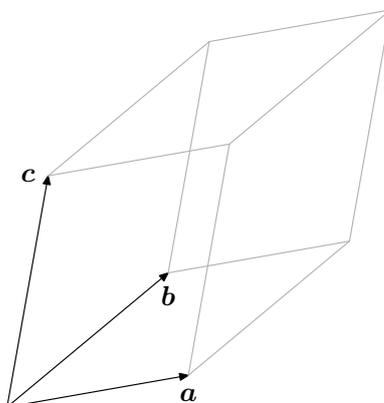


Figura 1.2: Paralelepípedo generado a partir de 3 vectores cuyo volumen puede ser calculado a partir del triple producto.

Esta descomposición es única y se puede escribir $\mathbf{a} = \mathbf{a}_u^{\parallel} + \mathbf{a}_u^{\perp}$. Véase la ilustración en la figura 1.1.

El **producto vectorial** de dos vectores se indica como $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y, para cualquier base cartesiana $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, éste se calcula mediante la regla

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad (1.19)$$

y da lugar a un vector perpendicular a \mathbf{a} y \mathbf{b} , orientado según la regla de la mano derecha y con módulo $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\theta)$, siendo θ el ángulo comprendido entre \mathbf{a} y \mathbf{b} . Por tanto, el área de un triángulo con lados \mathbf{a} , \mathbf{b} , $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es

$$\text{área}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|. \quad (1.20)$$

El producto vectorial de tres vectores, por ejemplo $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, tiene por expresión

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \quad (1.21)$$

Existen varias formas de demostrar esta identidad [11]. Quizá la más sencilla se basa en utilizar que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ es una operación *trilineal* en \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} y que el resultado debe de ser un vector contenido en el plano de \mathbf{b} y \mathbf{c} . En primer lugar suponemos que \mathbf{b} y \mathbf{c} no son paralelos, pues si no la demostración es trivial. En el caso $\mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ se sigue que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}, \quad (1.22)$$

siendo β, γ dos escalares. Tomando el producto escalar con \mathbf{a} de ambos lados de esta igualdad resulta que $0 = \beta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})$. Como \mathbf{b} y \mathbf{c} no

son paralelos, bien $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ o $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$ es no nulo. Suponiendo, por ejemplo, que el primer producto escalar es distinto de cero deduce que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \frac{\beta}{\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}} ((\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}) . \quad (1.23)$$

La única manera de que esta expresión sea lineal en los tres vectores es que β sea un múltiplo de $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$, es decir, que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = C((\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}) , \quad (1.24)$$

siendo C una constante independiente de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Tomando, $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2, \mathbf{b} = \mathbf{e}_2, \mathbf{c} = \mathbf{e}_3$ se comprueba que la constante ha de tener valor 1.

El *producto mixto* o *triple producto* de tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ se define como

$$[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} . \quad (1.25)$$

El triple producto es invariante frente a permutaciones pares de sus argumentos, pero cambia de signo cuando la permutación es impar. Además, se verifica:

$$[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} . \quad (1.26)$$

En esta última expresión, el primer determinante es el que se obtiene al colocar las componentes de los tres vectores en las columnas de una matriz, y el segundo en sus filas. El product mixto de tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ es igual al volumen orientado de un paralelepípedo con lados paralelos a estos tres vectores. Véase la Figura 1.2.

▷ **Ejemplo 1.2.2.** Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ dos bases ortonormales relacionadas por

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}'_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}'_2, \quad \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{e}'_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}'_2, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_3,$$

y tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ cuyas componentes en la base \mathcal{B} son

$$\{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{c}\}_{\mathcal{B}} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

Para calcular las componentes de estos tres vectores en la base \mathcal{B}' identificamos, en primer lugar, la matrix $[A]$ de cambio de base

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de lo que se sigue que

$$\begin{aligned}\{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}'} &= [A]^T \{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ 3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}'}, \\ \{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}'} &= [A]^T \{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}'}, \\ \{\mathbf{c}\}_{\mathcal{B}'} &= [A]^T \{\mathbf{c}\}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}'}.\end{aligned}$$

El producto escalar de \mathbf{a} y \mathbf{b} se puede calcular como

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}} \cdot \{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} \\ &= \{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}'} \cdot \{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}'} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ 3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}'} \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}'} \\ &= -1,\end{aligned}$$

pues al ser una operación intrínseca su valor es independiente de la base en la que se expresen los vectores. El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se puede calcular en cualquiera de las dos bases definidas

$$\begin{aligned}\{\mathbf{a} \times \mathbf{b}\}_{\mathcal{B}} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} \\ \{\mathbf{a} \times \mathbf{b}\}_{\mathcal{B}'} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 & \sqrt{3} + \frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} - 5\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}'}\end{aligned}$$

y se puede verificar que $\{\mathbf{a} \times \mathbf{b}\}_{\mathcal{B}} = [A]^T \{\mathbf{a} \times \mathbf{b}\}_{\mathcal{B}'}$. \triangleleft

1.3. Tensores

Los tensores son objetos del álgebra lineal tan útiles como los vectores, y su uso en varias ramas de la mecánica es muy habitual. Por ejemplo, el tensor de inercia aparece en la descripción de la dinámica del sólido rígido. En la mecánica de sólidos y fluidos este tipo de objetos aparece constantemente y permite, como se explicará en esta sección, expresar de forma compacta las relaciones lineales entre vectores.

1.3.1. Tensores de segundo orden

Los *tensores de segundo orden* son los más comunes y a veces nos referiremos a ellos simplemente como “tensores”, sobreentendiéndose que el orden al que se hace referencia es dos. Estos objetos se estudian en Álgebra bajo el nombre de “homomorfismos lineales”, y en estas notas se usará el símbolo \mathcal{V}^2 para referirnos a este conjunto. Los tensores de segundo orden son, pues, simplemente aplicaciones lineales de \mathcal{V} en \mathcal{V} , es decir, funciones lineales que transforman un vector en otro.

Para cualquier vector $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$, un tensor \mathbf{T} es una operación lineal tal que $\mathbf{T}(\mathbf{a})$ es otro vector. Por sencillez, los paréntesis se eliminan y se escribe simplemente $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$. La propiedad fundamental, por tanto de los tensores de segundo orden es

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{a} + \beta\mathbf{T}\mathbf{b}, \quad (1.27)$$

siendo α, β dos números reales y \mathbf{a}, \mathbf{b} dos vectores.

Notación: Igual que en el caso de los vectores, existe una notación especial que permite distinguir los tensores de segundo orden del resto de objetos (escalares, vectores, ...). También esta notación depende del autor o del libro que se consulte y un mismo tensor se puede escribir como $\mathbf{A}, \bar{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{A}}, \dots$. En estas notas se empleará la primera de ellas y se evitará la confusión entre vectores y tensores de segundo orden empleando siempre que no se indique lo contrario letras minúsculas en el primer caso y mayúsculas en el segundo.

1.3.2. Componentes y cambio de base

Recordamos que un tensor es simplemente una operación que transforma vectores en vectores, y que es lineal. Para describir completamente un tensor basta por tanto conocer el resultado de operarlo sobre un vector cualquiera. Si \mathbf{T} es un tensor de segundo orden y $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$, entonces podemos escribir

$$\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}, \quad (1.28)$$

siendo \mathbf{b} otro vector. Expresando \mathbf{a} y \mathbf{b} en una base y utilizando la linealidad del tensor se sigue que

$$\sum_k b_k \mathbf{e}_k = \mathbf{T}\left(\sum_j a_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_j a_j \mathbf{T}\mathbf{e}_j. \quad (1.29)$$

Vemos por tanto que para describir un tensor es suficiente saber cuál es el resultado de operarlo sobre los vectores de una base. Más aún, para conocer este resultado escribimos

$$b_i = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_i = \sum_j a_j \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}\mathbf{e}_j). \quad (1.30)$$

Definiendo las *componentes de un tensor* \mathbf{T} en la base $\{e_i\}$ como los nueve escalares

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}\mathbf{e}_j), \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.31)$$

se puede, finalmente, escribir el resultado de operar un tensor sobre un vector como

$$b_i = \sum_j T_{ij} a_j. \quad (1.32)$$

Las componentes de un tensor referidas a una base \mathcal{B} se muestran en forma de matriz, y se escribe

$$[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \quad (1.33)$$

de forma análoga a la expresión en un vector columna de un vector (1.5). Como en el caso de los vectores, la matriz de un tensor en una base cualquiera no debe confundirse con el tensor propiamente dicho.

La propiedad de linealidad de los tensores implica que las componentes del vector \mathbf{b} que resulta de la aplicación de un tensor \mathbf{T} sobre un vector \mathbf{a} se pueden obtener multiplicando la matriz $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}$ y el vector columna $\{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}}$. Es decir, si $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$, entonces

$$\{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}} = [\mathbf{T}]_{\mathcal{B}} \{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}}, \quad (1.34)$$

o más explícitamente

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}. \quad (1.35)$$

Observando la definición de las componentes de un tensor deducimos que éstas dependen de la base en la que se exprese el tensor. Para hallar la relación entre componentes de un mismo tensor en dos bases cartesianas distintas \mathcal{B} y \mathcal{B}' escribimos la relación $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$ en componentes de las dos bases.

$$\{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}} = [\mathbf{T}]_{\mathcal{B}} \{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}}, \quad \text{y} \quad \{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}'} = [\mathbf{T}]_{\mathcal{B}'} \{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}'}. \quad (1.36)$$

La expresión (1.11) relaciona las componentes de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} en las dos bases así que la segunda ecuación de (1.36) se puede escribir como

$$[A]^T \{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}} = [\mathbf{T}]_{\mathcal{B}'} [A]^T \{\mathbf{a}\}_{\mathcal{B}}. \quad (1.37)$$

Despejando $\{\mathbf{b}\}_{\mathcal{B}}$ y comparando el resultado con la primera ecuación de (1.36) se deduce que la expresión que relaciona las componentes de \mathbf{T} en las dos bases consideradas es

$$[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}} = [A][\mathbf{T}]_{\mathcal{B}'} [A]^T. \quad (1.38)$$

Al ser operadores lineales, todas las operaciones que podamos definir sobre o entre tensores tiene su analogía en las operaciones matriciales, aunque las primeras son independientes de las coordenadas. Así, por ejemplo, dado un tensor \mathbf{A} cualquiera se define su *traspuesto* \mathbf{A}^T como el único tensor que satisface

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{b}) = (\mathbf{A}^T\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}, \quad (1.39)$$

para cualquier pareja de vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$. Se puede comprobar que, en cualquier sistema de coordenadas, la matriz correspondiente a \mathbf{A}^T coincide con la matriz de componentes de \mathbf{A} , transpuesta.

1.3.3. Algunos tensores especiales

Algunos tensores o tipos de tensores aparecen a menudo o son muy útiles. Recogemos aquí algunos de ellos con su definición.

- a) El *tensor nulo* es el único tensor tal que $\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{0}$, para cualquier vector \mathbf{a} . En cualquier sistema de coordenadas, su matriz sólo tiene componentes nulas.
- b) Análogamente, el *tensor identidad* \mathbf{I} es el único que verifica $\mathbf{I}\mathbf{a} = \mathbf{a}$ para todo vector \mathbf{a} . La matriz de componentes de \mathbf{I} , en cualquier base, es la matriz identidad.
- c) Se dice que un tensor es *simétrico* si es igual a su traspuesto, y *antisimétrico* (o hemisimétrico) si es el opuesto de su traspuesto. Se comprueba inmediatamente que la matriz asociada a un tensor simétrico es simétrica, en cualquier base, y la matriz asociada a un tensor antisimétrico es a su vez antisimétrica, también en cualquier base. Los tensores antisimétricos tienen una propiedad que emplearemos más adelante y es que el efecto de aplicar un tensor antisimétrico \mathbf{W} sobre un vector cualquiera \mathbf{a} es el mismo que el de multiplicar vectorialmente un vector \mathbf{w} , llamado el *vector axial* de \mathbf{W} , sobre \mathbf{a} . Es decir, que para todo vector \mathbf{a} ,

$$\mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a}, \quad (1.40)$$

e indicamos $\mathbf{w} = \text{axial}[\mathbf{W}]$. Además esta relación es recíproca, y por ello multiplicar vectorialmente un vector \mathbf{w} por otro vector cualquiera \mathbf{a} es equivalente a multiplicar un tensor antisimétrico \mathbf{W} , que es único, y que se llama el tensor *antisimétrico asociado al vector* \mathbf{w} .

- d) Un tensor \mathbf{T} es *definido positivo* si $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{a}) \geq 0$ para cualquier vector \mathbf{a} y además sólo es cero cuando el vector \mathbf{a} es nulo. Si se elimina esta última condición se dice que el tensor es *semidefinido positivo*.

1.4. Tensores de rotación

Las rotaciones son tensores de orden dos que juegan un papel muy importante en Mecánica de Medios Continuos y, en general, en toda la Mecánica. Un tensor \mathbf{Q} es *ortogonal* si satisface

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I} . \quad (1.41)$$

Si $\det \mathbf{Q} = 1$ el tensor es una *rotación* y si $\det(\mathbf{Q} = -1$, es una *reflexión*. La propiedad fundamental de los tensores ortogonales es que conservan el producto escalar, es decir, para toda pareja de vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} verifican

$$(\mathbf{Q}\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{Q}\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} . \quad (1.42)$$

Tomemos ahora una curva uniparamétrica de tensores de rotación $t \mapsto \mathbf{Q}(t)$. Derivando la identidad $\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}^T(t) = \mathbf{I}$ con respecto al tiempo obtenemos

$$\dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t) = -(\mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{Q}}^T(t)) , \quad (1.43)$$

así pues $\dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t)$ es un tensor hemisimétrico que llamamos $\hat{\omega}(t)$ y por tanto

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \hat{\omega}(t)\mathbf{Q}(t) . \quad (1.44)$$

El vector axial $\boldsymbol{\omega}(t)$ se llama la velocidad angular de la rotación $\mathbf{Q}(t)$.

1.4.1. Operaciones algebraicas

Los tensores poseen las operaciones de suma, multiplicación y multiplicación por un escalar y estas se definen a partir de los conceptos correspondientes para vectores y la propiedad de linealidad. Por ejemplo, dados dos tensores \mathbf{A}, \mathbf{B} , el tensor suma $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ se define como aquel que aplicado a un vector cualquiera \mathbf{v} resulta $\mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{v}$. El producto de dos tensores $\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}$ es el único tensor que satisface

$$\mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{v}) \quad (1.45)$$

para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

La expresión matricial del resultado de todas estas operaciones es la correspondiente operación matricial operada sobre las matrices de componentes de los tensores. Insistimos, como en el caso de los vectores, que el resultado es independiente de la base escogida.

Dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} pueden operarse mediante el llamado *producto diádico*, o *producto exterior*, resultando en un tensor de segundo orden $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ definido por

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) , \quad (1.46)$$

para cualquier vector \mathbf{c} . Esta operación es muy importante porque permite *construir* tensores a partir de objetos más sencillos, como son los vectores.

De hecho, un tensor de segundo orden \mathbf{T} con componentes T_{ij} en una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ se puede definir como

$$\mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^{\dim} T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j . \quad (1.47)$$

Para comprobar esta afirmación basta con comprobar que la componente (i, j) del tensor así definido es precisamente T_{ij} . De la definición (1.31) se sigue que

$$\mathbf{e}_i \cdot \left(\sum_{k,l=1}^{\dim} T_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \right) \mathbf{e}_j = \sum_{k,l=1}^{\dim} T_{kl} \delta_{ik} \delta_{lj} = T_{ij} . \quad (1.48)$$

Esta forma de construir tensores se puede extender a objetos de orden más alto, como se verá más adelante.

La *traza* es una operación lineal sobre tensores definida mediante la relación

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad (1.49)$$

sobre diádicas. Como todo tensor es la suma de 9 parejas diádicas se verifica

$$\text{tr}(\mathbf{T}) = \text{tr}\left(\sum_{i,j=1}^{\dim} T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right) = \sum_{i,j=1}^{\dim} T_{ij} \text{tr}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{\dim} T_{ij} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{\dim} T_{ii} . \quad (1.50)$$

La traza de un tensor no depende tampoco de la base en la que se exprese su matriz de componentes y se dice que es por tanto un invariante del tensor. La operación traza es lineal así que, dado un escalar α y dos tensores \mathbf{T}, \mathbf{S} ,

$$\text{tr}(\alpha \mathbf{T}) = \alpha \text{tr}(\mathbf{T}) , \quad \text{tr}(\mathbf{T} + \mathbf{S}) = \text{tr}(\mathbf{T}) + \text{tr}(\mathbf{S}) . \quad (1.51)$$

Decimos que un tensor es *desviador* si tiene traza nula y *esférico* si es de la forma $\mathbf{T} = p\mathbf{I}$, siendo p un escalar.

El *producto escalar entre tensores* de orden dos se escribe con el símbolo “:” y se define como la operación que a toda pareja de tensores \mathbf{T}, \mathbf{S} asocia el escalar $\mathbf{T} : \mathbf{S}$ definido por

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} = \text{tr}(\mathbf{S}^T \mathbf{T}) . \quad (1.52)$$

En componentes, la operación de la doble contracción, como también se conoce a este producto escalar, es simplemente

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} = \sum_{i=1}^{\dim} \sum_{j=1}^{\dim} T_{ij} S_{ij} . \quad (1.53)$$

Como esta operación define un producto escalar, también se puede definir una *norma* asociada de tensores:

$$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{\mathbf{T} : \mathbf{T}} . \quad (1.54)$$

El *adjunto* de un tensor \mathbf{T} es otro tensor $\text{adj}(\mathbf{T})$ definido mediante la siguiente relación: sean \mathbf{a} y \mathbf{b} dos vectores cualesquiera, el adjunto de \mathbf{T} es el único tensor que verifica

$$(\mathbf{T}\mathbf{a}) \times (\mathbf{T}\mathbf{b}) = \text{adj}(\mathbf{T})(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) . \quad (1.55)$$

Nótese que el tensor \mathbf{T} puede ser singular y que aún así, su adjunto está bien definido. El *determinante* de un tensor \mathbf{T} es el escalar $\det(\mathbf{T})$ que verifica

$$[\mathbf{T}\mathbf{a} \ \mathbf{T}\mathbf{b} \ \mathbf{T}\mathbf{c}] = \det(\mathbf{T})[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] . \quad (1.56)$$

El determinante es, por tanto, otro invariante del tensor. Cuando un tensor tiene determinante nulo se dice que éste es *singular* y en caso contrario, *regular*.

Por último, dado un tensor regular $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$ cualquiera, existe un tensor \mathbf{T}^{-1} , denominado el tensor *inverso* de \mathbf{T} tal que

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I} . \quad (1.57)$$

El tensor inverso además, cuando existe, es único. Existe un caso particular de tensores en los que el tensor inverso coincide con el transpuesto. Estos tensores se llaman *ortogonales* y si además su determinante es igual a 1, entonces *rotaciones*.

▷ **Ejemplo 1.4.1.** Sea \mathbf{F} un tensor regular de segundo orden. Demostrar, usando la definición del determinante, que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) ,$$

siendo $\mathbf{a} = \mathbf{F}\mathbf{A}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{B}$.

Para demostrar esta identidad se emplea un método muy común en otras demostraciones de álgebra y cálculo tensorial. Sea $\mathbf{c} = \mathbf{F}\mathbf{C}$ un vector arbitrario en \mathcal{V} . Usando la definición del determinante de un tensor se tiene que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = [\mathbf{F}\mathbf{A} \ \mathbf{F}\mathbf{B} \ \mathbf{F}\mathbf{C}] = \det(\mathbf{F})(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{c}) .$$

Además, usando las propiedades del producto escalar se cumple que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{F})(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{c}) = [\det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})] \cdot \mathbf{c} .$$

Comparando la expresión de la izquierda y la de la derecha, puesto que \mathbf{c} es un vector arbitrario se debe de cumplir que aquello que está multiplicando ha de ser también lo mismo, es decir,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) ,$$

que es el resultado pedido. ◁

1.4.2. Autovectores y autovalores

Dado un tensor \mathbf{T} cualquiera, se dice que el vector \mathbf{v} es un *autovector* y λ su *autovalor* asociado si \mathbf{v} es unitario y

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} . \quad (1.58)$$

Para calcular los autovalores buscamos las soluciones no triviales de la identidad (1.58) y para ello hay que resolver la ecuación

$$\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = 0 . \quad (1.59)$$

Esta ecuación es un polinomio de tercer grado que tiene por expresión

$$-\lambda^3 + I_1(\mathbf{T})\lambda^2 - I_2(\mathbf{T})\lambda + I_3(\mathbf{T}) = 0 . \quad (1.60)$$

Las funciones I_1, I_2, I_3 son los llamados *invariantes principales* del tensor \mathbf{T} , porque no dependen de la base, y su expresión explícita es

$$I_1(\mathbf{T}) = \text{tr}(\mathbf{T}) , \quad I_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{T})^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2)) , \quad I_3(\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}) . \quad (1.61)$$

Como en álgebra de matrices, una vez calculados los tres autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 , se calculan sus autovectores asociados buscando las bases de los espacios nulos de los tensores

$$\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I} , \quad (1.62)$$

que no son vacíos por definición. Cuando el tensor es simétrico, el siguiente teorema espectral garantiza que los autovalores y autovectores cumplen una propiedades especiales que se emplearán muy a menudo en la mecánica de sólidos deformables. Por su importancia incluimos una demostración del teorema.

Teorema 1.4.2. *Los tres autovalores de un tensor simétrico \mathbf{S} son reales y sus tres autovectores asociados forman una base ortonormal, llamada la base principal del tensor, que denominamos \mathcal{B}^* . En esta base, la expresión matricial del tensor es:*

$$[\mathbf{S}]_{\mathcal{B}^*} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}^*} . \quad (1.63)$$

Demostración. Demostramos primero que los tres autovalores son reales. Como el polinomio característico de \mathbf{S} es de tercer orden, este tiene tres raíces (autovalores) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que en principio pueden ser complejas. Si \mathbf{v} es el autovector asociado a un autovalor λ de los tres y $\bar{\mathbf{v}}$ es el autovector conjugado entonces

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{S}\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \cdot \lambda\mathbf{v} = \lambda|\mathbf{v}|^2 . \quad (1.64)$$

Conjugando ambos lados de la ecuación anterior, se obtiene

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}|\mathbf{v}|^2. \quad (1.65)$$

Igualando las identidades (1.64) y (1.65), y dado que \mathbf{S} es un tensor simétrico, concluimos que $\lambda = \bar{\lambda}$, es decir que λ es real.

La demostración de la segunda parte es inmediata si los autovalores son distintos, pero consideramos el caso más general. Como antes, sean $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ los tres autovalores de \mathbf{S} (ordenados de cualquier manera) y $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ sus autovectores correspondientes. Si \mathbf{w} es un vector ortogonal a \mathbf{v}_1 , entonces $\mathbf{S}\mathbf{w}$ es también ortogonal a \mathbf{v}_1 , porque $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{S}\mathbf{w} = \mathbf{S}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} = 0$. Así pues \mathbf{S} , cuando se restringe al subespacio de vectores ortogonales a \mathbf{v}_1 es también un tensor de ese conjunto a sí mismo. Por lo tanto tendrá dos autovalores y autovectores, que forzosamente deberán ser ortogonales a \mathbf{v}_1 . Tomando uno cualquiera que llamamos λ_2 y \mathbf{v}_2 al autovector, repetimos el mismo argumento para el subespacio de vectores ortogonales a \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 para concluir que los tres autovectores son ortonormales.

En la base principal tenemos

$$\{\mathbf{v}_1\}_{\mathcal{B}^*} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}^*}, \quad \{\mathbf{v}_2\}_{\mathcal{B}^*} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}^*}, \quad \{\mathbf{v}_3\}_{\mathcal{B}^*} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}^*}. \quad (1.66)$$

por lo que la expresión matricial de \mathbf{S} ha de ser como se indica en (1.63). \square

Un tensor simétrico con dos autovalores iguales se llama *cilíndrico*, y cuando los tres son iguales, *esférico*. En este último caso el tensor ha de ser proporcional al tensor identidad.

Dado un tensor simétrico \mathbf{S} , definimos la función escalar $s(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}\mathbf{u}$. Si se restringe el dominio de la función a los vectores unitarios, ésta toma valores acotados y

$$\max_{\mathbf{u}, |\mathbf{u}|=1} s(\mathbf{u}) = \max_{1 \leq i \leq 3} \lambda_i, \quad \min_{\mathbf{u}, |\mathbf{u}|=1} s(\mathbf{u}) = \min_{1 \leq i \leq 3} \lambda_i. \quad (1.67)$$

La demostración de dicho resultado se puede obtener expresando el tensor \mathbf{S} y el vector \mathbf{u} en la base principal de autovectores. En esta base,

$$s(\mathbf{u}) = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 v_3^2 \leq \max_{1 \leq i \leq 3} \lambda_i (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = \max_{1 \leq i \leq 3} \lambda_i. \quad (1.68)$$

De esta relación se sigue que el máximo de $s(\mathbf{u})$ es menor o igual que el mayor autovalor. La demostración de la cota inferior es análoga.

Dichos valores máximo y mínimo jugarán un papel relevante en la descripción mecánica y cinemática de un medio continuo.

1.4.3. Funciones de tensores

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, esta función se puede extender al dominio de los tensores simétricos sin más que definir

$$f(\mathbf{S}) := \sum_{I=1}^{\dim} f(\lambda_I) \mathbf{v}_I \otimes \mathbf{v}_I . \quad (1.69)$$

Así, for ejemplo, si \mathbf{C} es un tensor simétrico con autovalores no negativos $\lambda_I^2, \lambda_{II}^2, \lambda_{III}^2$ se define

$$\sqrt{\mathbf{C}} := \sum_{I=1}^{\dim} \lambda_I \mathbf{v}_I \otimes \mathbf{v}_I , \quad (1.70)$$

y verifica $(\sqrt{\mathbf{C}})^2 = \mathbf{C}$. Otro ejemplo útil es el logaritmo de un tensor. Repitiendo la misma idea, definimos

$$\log \mathbf{C} := \sum_{I=1}^{\dim} \log(\lambda_I^2) \mathbf{v}_I \otimes \mathbf{v}_I . \quad (1.71)$$

1.4.4. Descomposiciones de tensores

Estudiamos a continuación algunas formas en las que un tensor de puede “separar” en partes que, aparentemente, son más sencillas. El motivo para estas realizar estas descomposiciones es que a menudo es más sencillo estudiar una cantidad tensorial haciéndolo por separado para cada una de sus partes.

Descomposición por simetría

Todo tensor \mathbf{T} se puede descomponer de forma única en una parte simétrica \mathbf{T}^s y otra antisimétrica \mathbf{T}^a de forma que $\mathbf{T} = \mathbf{T}^s + \mathbf{T}^a$. Se comprueba fácilmente que cada una de estas partes son:

$$\mathbf{T}^s = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) , \quad \mathbf{T}^a = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T) . \quad (1.72)$$

Estas dos partes son, además ortogonales.

Descomposición por traza

Además, todo tensor \mathbf{T} se puede descomponer de forma única en una parte esférica y otra desviadora. La parte esférica, que denominaremos \mathbf{T}^{esf} tiene la misma traza que \mathbf{T} y la parte desviadora \mathbf{T}^{des} no tiene traza. Ambas se calculan así:

$$\mathbf{T}^{esf} = \frac{\text{tr}(\mathbf{T})}{\dim} \mathbf{I} , \quad \mathbf{T}^{des} = \mathbf{T} - \mathbf{T}^{esf} . \quad (1.73)$$

Como en el caso anterior, las dos partes son ortogonales.

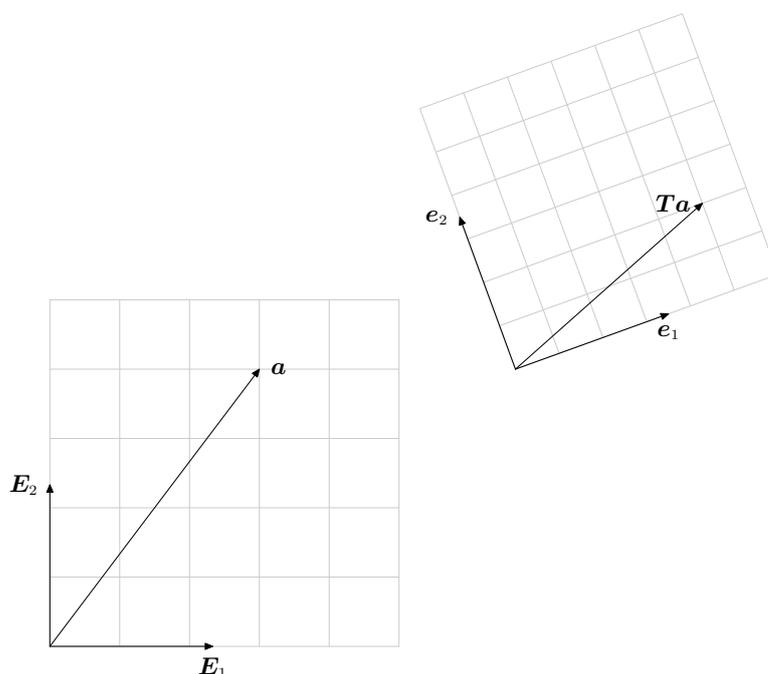


Figura 1.3: Ilustración del resultado de aplicar el tensor de dos puntos T sobre el vector a .

Descomposición polar

El teorema de la descomposición polar de tensores es una de las piezas fundamentales de la cinemática de medios continuos y lo presentamos junto con su demostración para el caso más sencillo [10].

Teorema 1.4.3. *Sea F un tensor regular. Existe un único tensor de rotación R y dos tensores U, V simétricos, definidos positivos tal que*

$$F = RU = VR. \quad (1.74)$$

Demostración. El tensor $C = F^T F$ es simétrico y definido positivo por lo que se puede calcular su raíz cuadrada U , que es otro tensor simétrico y definido positivo. Por último, basta con definir $R = FU^{-1}$. Usando el mismo razonamiento se comprueba que $V = RUR^T$. □

1.5. Tensores de dos puntos

Hasta ahora hemos empleado únicamente tensores que operan desde y hacia el mismo espacio vectorial. En general, el dominio y el co-dominio de un tensor T de segundo orden no tienen por qué ser iguales y resulta

ventajoso distinguirlos. Suponiendo que el dominio tiene por base $\{\mathbf{E}_i\}$ y el codominio a su vez $\{\mathbf{e}_i\}$, entonces una operación como $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$ se puede escribir como

$$\sum_i b_i \mathbf{e}_i = \mathbf{T} \sum_j a_j \mathbf{E}_j = \sum_j a_j \mathbf{T}\mathbf{E}_j, \quad (1.75)$$

y por tanto

$$b_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{b} = \sum_j a_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{E}_j = \sum_j T_{ij} a_j \quad (1.76)$$

siendo $T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{E}_j$ las componentes de este tensor en la base “mixta”. Por esto, el tensor \mathbf{T} puede representarse como

$$\mathbf{T} = \sum_{i,j} T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j. \quad (1.77)$$

Este tipo de operadores se conocen como *tensores de dos puntos*. En la figura 1.3 se ilustra el efecto de operar un tensor de dos puntos sobre un vector cualquiera. Nótese como el origen de los dos vectores son puntos distintos, de ahí el nombre del tensor.

1.6. Tensores de cuarto orden

Aunque existen tensores de cualquier orden, sólo utilizaremos en este curso lo de orden dos y cuatro¹. Estos últimos se definen como aplicaciones lineales en el espacio de tensores de segundo orden y llamamos \mathcal{V}^4 al conjunto de todos los tensores de cuarto orden.

Notación: Igual que en el caso de los vectores y tensores, existe una notación especial para los tensores de cuarto orden. Esta notación, como las anteriores, cambia según el autor y libro siendo algunas de ellas $\overset{\equiv}{\equiv}{\equiv}{\equiv} \mathbb{A}, \overset{\equiv}{\equiv}{\equiv}{\equiv} \mathbb{A}$. En estas notas los tensores de cuarto orden se distinguirán por el tipo de letra y escribiremos simplemente \mathbb{A}, \mathbb{B} , etc.

La propiedad fundamental de un *tensor de cuarto orden* \mathbb{C} es su linealidad, es decir, que siendo \mathbf{A}, \mathbf{B} dos tensores de segundo orden cualesquiera,

$$\mathbb{C}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\mathbb{C}\mathbf{A} + \beta\mathbb{C}\mathbf{B}, \quad (1.78)$$

cuando α y β son números reales. Además, de manera análoga a la operación “ \otimes ” definida entre vectores, se define el *producto diádico de tensores de segundo orden* como la operación $\otimes : \mathcal{V}^2 \times \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}^4$ que sirve para construir tensores de cuarto orden que satisfacen

¹En realidad, los escalares y los vectores se pueden considerar como tensores de orden 0 y 1, respectivamente.

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} : \mathbf{C}), \quad (1.79)$$

siendo $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ tres tensores cualesquiera.

El tensor identidad de cuarto orden, indicado como \mathbb{I} , verifica $\mathbb{I}\mathbf{A} = \mathbf{A}$, para cualquier tensor $\mathbf{A} \in \mathcal{V}^2$. Además, el tensor \mathbb{I}^s es el tensor identidad del conjunto de tensores simétricos de segundo orden y satisface la propiedad $\mathbb{I}^s\mathbf{A} = \mathbf{A}^s$.

1.7. Cálculo vectorial y tensorial

En teoría de campos se estudian los principales operadores diferenciales que actúan sobre los campos escalares y vectoriales que son el gradiente, la divergencia y el rotacional. Estos tres operadores tienen una definición *intrínseca*, independiente del sistema de referencia empleado, que presentaremos de la forma más directa posible. En la práctica, siempre utilizaremos estos operadores con coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas, pues su cálculo es muy sencillo. Como las operaciones intrínsecas son válidas en todos los sistemas de coordenadas, los resultados que se obtengan en sistemas cartesianos, si se pueden expresar en función de operaciones intrínsecas, serán válidos para cualquier sistema de referencia. Muchos más detalles pueden encontrarse en el texto [6].

El operador **gradiente** determina la parte lineal en una expansión en serie de Taylor de un campo escalar, o vectorial, o de mayor orden. Para desarrollar este concepto, consideremos una región $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. En el caso escalar, siendo $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo diferenciable en $\mathbf{x} \in \Omega$ se tiene que

$$\phi(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = \phi(\mathbf{x}) + \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^2) \quad (1.80)$$

donde la notación $\mathcal{O}(|\mathbf{u}|^2)$ indica que los términos que siguen son del orden de $|\mathbf{u}|^2$. Empleando el concepto de **diferencial de una función**, el gradiente también se puede definir como aquel campo vectorial que satisface

$$df(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.81)$$

Usando esta definición, resulta inmediato comprobar que el gradiente de un campo escalar es un campo vectorial cuyas componentes en un sistema de coordenadas cartesianas son:

$$\{\nabla\phi(x, y, z)\} = \begin{Bmatrix} \phi_{,x} \\ \phi_{,y} \\ \phi_{,z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{Bmatrix}. \quad (1.82)$$

En esta expresión, y más abajo, se utiliza la notación $\phi_{,x}$ para indicar la derivada parcial $\frac{\partial\phi}{\partial x}$, y lo mismo para el resto de coordenadas.

De manera análoga, si $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathcal{V}$ es un campo vectorial diferenciable, también éste se puede expandir en serie de Taylor y la parte lineal se corresponde con el gradiente. Usando la definición (1.81), el **gradiente de un campo vectorial** es el campo tensorial que satisface

$$d\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla\mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} . \quad (1.83)$$

En coordenadas cartesianas este operador tiene por expresión:

$$[\nabla\mathbf{v}(x, y, z)] = \begin{bmatrix} v_{x,x} & v_{x,y} & v_{x,z} \\ v_{y,x} & v_{y,y} & v_{y,z} \\ v_{z,x} & v_{z,y} & v_{z,z} \end{bmatrix} . \quad (1.84)$$

El resto de operadores diferenciales (divergencia y rotacional) se pueden definir de manera intrínseca a partir de conceptos integrales (flujos y circulación) y encontrar a partir de éstos su relación con el gradiente. Alternativamente, se pueden definir algebraicamente a partir de la definición del gradiente y deducir sus propiedades integrales. Aquí emplearemos el segundo camino que, aunque menos intuitivo, es más directo y completamente equivalente y se deja para cursos de teoría de campos el camino integral.

El operador **divergencia** de un campo vectorial $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathcal{V}$ se define de manera intrínseca como

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{tr}(\nabla\mathbf{v}) , \quad (1.85)$$

que en coordenadas cartesianas tiene por expresión

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z} . \quad (1.86)$$

Además, si $\mathbf{T} : \Omega \rightarrow \mathcal{V}^2$ es un campo tensorial diferenciable su divergencia es el campo vectorial unívocamente definido por la propiedad:

$$(\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot (\mathbf{T}^T \mathbf{a}) , \quad (1.87)$$

siendo \mathbf{a} un vector cualquiera en \mathbb{R}^3 . En coordenadas cartesianas la divergencia de un tensor tiene por componentes:

$$\{\nabla \cdot \mathbf{T}\} = \begin{Bmatrix} T_{xx,x} + T_{xy,y} + T_{xz,z} \\ T_{yx,x} + T_{yy,y} + T_{yz,z} \\ T_{zx,x} + T_{zy,y} + T_{zz,z} \end{Bmatrix} . \quad (1.88)$$

Por último, volviendo a emplear el campo vectorial \mathbf{u} , su **rotacional** $\nabla \times \mathbf{u}$ es el campo vectorial definido por

$$\frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = (\nabla\mathbf{u})^a \mathbf{v} , \quad (1.89)$$

para todo vector \mathbf{v} , siendo $(\nabla\mathbf{u})^a$ la parte hemisimétrica del gradiente de \mathbf{u} . En coordenadas cartesianas se verifica que:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} . \quad (1.90)$$

El concepto de rotacional se puede extender a campos tensoriales y es que dado un $\mathbf{T} : \Omega \rightarrow \mathcal{V}^2$, se define su rotacional $\nabla \times \mathbf{T}$ como el campo que satisface

$$(\nabla \times \mathbf{T})\mathbf{v} = \nabla \times (\mathbf{T}^T \mathbf{v}) . \quad (1.91)$$

Existen numerosas relaciones entre los operadores diferenciales y teoremas integrales que los emplean. En este curso utilizaremos tres: el teorema de la divergencia, la fórmula de la integral por partes y el teorema de Stokes.

Teorema 1.7.1 (Teorema de Gauss o de la divergencia). *Sea Ω un subconjunto de \mathbb{R}^d y Γ su contorno. Si \mathbf{v} es un campo vectorial diferenciable definido en Ω se verifica que:*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma , \quad (1.92)$$

siendo \mathbf{n} la normal saliente a Γ . Si \mathbf{T} es un campo tensorial diferenciable sobre Ω , entonces

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{T} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{T}\mathbf{n} \, d\Gamma , \quad (1.93)$$

El teorema de la divergencia se aplicará en numerosas ocasiones. Un corolario del mismo es la expresión para la integral por partes: si ϕ es un campo escalar, entonces

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, \phi \, d\Omega = \int_{\Gamma} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \, d\Omega . \quad (1.94)$$

En el caso tensorial, si \mathbf{T} es un campo tensorial como anteriormente, entonces

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega . \quad (1.95)$$

El **teorema de Stokes** relaciona la circulación de un campo vectorial o tensorial a lo largo de una curva cerrada con el flujo de su rotacional a través de una superficie que esté delimitada por dicha curva. Si denominamos Γ a una curva cerrada y conexa y \mathcal{A} una superficie cuya frontera es Γ y cuya normal es \mathbf{n} , entonces este teorema establece que

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{A}} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA , \quad (1.96)$$

siendo \mathbf{v} un campo vectorial arbitrario. El teorema de Stokes sigue siendo válido si en lugar de este campo vectorial se emplea un campo tensorial.

1.8. Notación indicial

La notación empleada hasta ahora para trabajar con vectores y tensores evita, en la mayor parte de las ocasiones, conocer y operar con las componentes individuales de cada uno de ellos. A veces, sin embargo, resulta útil hacer referencia de forma explícita a estas componentes y para ello existe una notación que, aunque aparentemente algo más compleja que la utilizada hasta el momento, facilita la demostración de algunas propiedades tensoriales y de ciertos teoremas. Esta notación, que ahora describimos, se conoce como *notación indicial* o *convenio de Einstein*.

Empecemos recordando que dada una base de vectores ortonormales $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, todo vector se puede expresar como una combinación lineal

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3, \quad (1.97)$$

expresión que se puede escribir de forma más compacta usando un sumatorio:

$$\mathbf{v} = \sum_{p=1}^3 v_p \mathbf{e}_p. \quad (1.98)$$

Como es tedioso tener que escribir constantemente el símbolo de sumatorio e indicar sus límites (siempre son los mismos) se adopta la siguiente convención: en vez de las ecuaciones (1.97) ó (1.98) se escribe simplemente

$$\mathbf{v} = v_p \mathbf{e}_p. \quad (1.99)$$

En esta expresión, y en toda aquella en la que dos objetos que se multiplican tengan un mismo índice repetido, se entenderá que $v_p \mathbf{e}_p$ significa $v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$. En vez del subíndice p se podría haber empleado cualquier otro, y así

$$v_p \mathbf{e}_p = v_q \mathbf{e}_q = v_i \mathbf{e}_i, \quad (1.100)$$

por lo que el índice repetido se denomina *mudo*. De esta manera, usando notación indicial, el producto escalar de dos vectores se escribiría simplemente como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i. \quad (1.101)$$

Dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son iguales si $a_p \mathbf{e}_p = b_p \mathbf{e}_p$. Esta igualdad se puede reescribir como $(a_p - b_p) \mathbf{e}_p = \mathbf{0}$. Como los vectores de la base son linealmente independientes, esta última expresión requiere que cada componente se anule, es decir, $a_p - b_p = 0$, o de otra manera

$$a_p = b_p. \quad (1.102)$$

De este simple ejemplo se deduce que cuando en una igualdad aparezca un mismo índice en varios lugares, pero no multiplicándose, quiere decir que la

igualdad es válida cuando el índice toma el valor 1,2 ó 3. Un índice de este tipo se denomina *libre* y puede intercambiarse por otra letra cualquiera, siempre que no se emplee en otra parte de la igualdad. Por ejemplo, la identidad (1.102) quiere expresar

$$a_1 = b_1 , \quad a_2 = b_2 , \quad a_3 = b_3 . \quad (1.103)$$

Cuando se trabaja con tensores de segundo orden también se emplea una base tensorial de nueve tensores:

$$\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3\} , \quad (1.104)$$

y todo tensor \mathbf{T} se puede escribir como combinación lineal de estos tensores más simples, es decir,

$$\mathbf{T} = T_{11}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + T_{12}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + T_{13}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + T_{21}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \dots \quad (1.105)$$

En este caso se observa aún más claramente que resulta muy tedioso escribir y trabajar con las nueve componentes de un tensor. Se podría escribir la expresión previa como

$$\mathbf{T} = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 T_{pq} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q , \quad (1.106)$$

pero igual que con los vectores, se adopta la convención de que esta última expresión se puede escribir simplemente como

$$\mathbf{T} = T_{pq} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q . \quad (1.107)$$

Como en el caso de los vectores, los índices repetidos cuyos objetos correspondientes se multiplican expresan un sumatorio, con dicho índice tomando valores 1, 2 y 3.

También como en el caso de los vectores, aquellos índices libres que aparecen repetidos en varios lugares de una igualdad, pero cuyas componentes correspondientes no se multiplican indican que la igualdad es válida cuando los índices toman valores 1,2 y 3. Así por ejemplo $T_{ij} + R_{ij} = \alpha$ quiere decir que la suma de cualquier componente del tensor \mathbf{T} de segundo orden más la misma componente del tensor de segundo orden \mathbf{R} es igual a α .

Las consideraciones aquí presentadas son válidas también para tensores de mayor orden. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} A_{ijk}v_j &= A_{i1k}v_1 + A_{i2k}v_2 + A_{i3k}v_3 \\ S_{pqr}T_{ir} &= S_{pq1}T_{i1} + S_{pq2}T_{i2} + S_{pq3}T_{i3} . \end{aligned} \quad (1.108)$$

El producto vectorial de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} se puede expresar en notación indicial como

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k , \quad (1.109)$$

siendo ε_{ijk} las componentes de un tensor de tercer orden, cuyo valor es

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ u otra combinación par} \\ -1 & \text{si } (i, j, k) = (2, 1, 3) \text{ u otra combinación par} \\ 0 & \text{si algún índice está repetido} \end{cases} \quad (1.110)$$

y que se conoce como el **tensor de permutación** o **de Levi-Civita**. De manera equivalente, el valor de ε_{ijk} también se puede definir como

$$\varepsilon_{ijk} = \det[\mathbf{e}_i \ \mathbf{e}_j \ \mathbf{e}_k], \quad (1.111)$$

es decir, como el determinante de una matriz cuyas columnas, o filas, son las componentes de los vectores $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k$.

Este tensor satisface la **identidad** $\delta - \varepsilon$ que es muy útil para demostrar algunos resultados en álgebra y cálculo tensorial, cuya expresión es

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ipq} = \delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{kp}. \quad (1.112)$$

La demostración de esta igualdad es como sigue. En primer lugar recordamos que usando la definición del determinante, los tensores de permutación se pueden calcular como

$$\varepsilon_{ijk} = |\mathbf{e}_i \ \mathbf{e}_j \ \mathbf{e}_k|, \quad \varepsilon_{ipq} = |\mathbf{e}_i \ \mathbf{e}_p \ \mathbf{e}_q|. \quad (1.113)$$

Usando las propiedades del determinante, y observando que el producto de dos determinantes es el determinante del producto de los dos tensores, se sigue que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ipq} &= |\mathbf{e}_i \ \mathbf{e}_j \ \mathbf{e}_k|^T |\mathbf{e}_i \ \mathbf{e}_p \ \mathbf{e}_q| \\ &= \left| [\mathbf{e}_i \ \mathbf{e}_j \ \mathbf{e}_k]^T [\mathbf{e}_i \ \mathbf{e}_p \ \mathbf{e}_q] \right| \\ &= \begin{vmatrix} 3 & \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{ji} & \delta_{jp} & \delta_{jp} \\ \delta_{ki} & \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Calculando el valor de dicho determinante expandiendo por los menores de la fila primera, por ejemplo, se obtiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ipq} &= 3(\delta_{jp}\delta_{kp} - \delta_{kp}\delta_{jq}) - \delta_{ip}(\delta_{ji}\delta_{kq} - \delta_{jq}\delta_{ki}) + \delta_{iq}(\delta_{ji}\delta_{kp} - \delta_{ki}\delta_{jp}) \\ &= \delta_{jp}\delta_{kp} - \delta_{jq}\delta_{kp}, \end{aligned} \quad (1.115)$$

que es la identidad $\varepsilon - \delta$.

▷ **Ejemplo 1.8.1.** Si $\mathbf{H} = \hat{\mathbf{h}}$ es un tensor hemisimétrico con componentes $H_{ij} = -H_{ji}$, demuestra que su vector axial \mathbf{h} tiene por componentes $h_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}H_{ij}$. También, dado un vector \mathbf{h} , demostrar que su tensor hemisimétrico asociado $\hat{\mathbf{h}}$ tiene por componentes $\hat{h}_{ij} = \varepsilon_{ikj}h_k$.

Para demostrar el primer resultado basta con tomar un vector cualquiera \mathbf{a} y comprobar que $\mathbf{H}\mathbf{a} = \mathbf{h} \times \mathbf{a}$ si

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \times \mathbf{a} &= \epsilon_{ijk} h_i a_j \mathbf{e}_k \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{1}{2} \epsilon_{lim} H_{lm} a_j \mathbf{e}_k \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{jm} \delta_{kl} - \delta_{jl} \delta_{km}) H_{lm} a_j \mathbf{e}_k \\ &= \frac{1}{2} (H_{kj} - H_{jk}) a_j \mathbf{e}_k \\ &= H_{kj} a_j \mathbf{e}_k = \mathbf{H}\mathbf{a} . \end{aligned}$$

El segundo resultado se demuestra de manera análoga hallando las componentes del tensor $\hat{\mathbf{h}}$ tal que $\hat{\mathbf{h}}\mathbf{a} = \mathbf{h} \times \mathbf{a}$ para cualquier vector \mathbf{a} . \triangleleft

▷ **Ejemplo 1.8.2.** Si $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$, demuestra

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r} \times (\mathbf{A}\mathbf{n}) \, dA = \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{r} \times (\nabla \cdot \mathbf{A}) + 2 \text{axial}[\mathbf{A}^a]) \, dV ,$$

siendo \mathbf{A} un campo tensorial, $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$, y \mathbf{n} la normal saliente al contorno $\partial\mathcal{R}$.

Para demostrar este resultado utilizamos la solución del problema 1.11 y expresamos los objetos en la base cartesiana como se indica.

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{r} \times (\mathbf{A}\mathbf{n}) \, dA &= \int_{\partial\mathcal{R}} \hat{\mathbf{r}} \mathbf{A}\mathbf{n} \, dA \\ &= \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot (\hat{\mathbf{r}} \mathbf{A}) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot (\epsilon_{ijk} x_j A_{km} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{R}} (\epsilon_{ijk} \delta_{jm} A_{km} \mathbf{e}_i + \epsilon_{ijk} x_j A_{km,m} \mathbf{e}_i) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{R}} (\epsilon_{ijk} A_{jm} \mathbf{e}_i + \mathbf{r} \times \nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{R}} (\text{axial}[\mathbf{A}^a] + \mathbf{r} \times \nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV . \end{aligned}$$

\triangleleft

Notación indicial para los operadores diferenciales. Definimos la notación $\phi_{,i}$ para indicar la derivada parcial de un campo escalar ϕ , es decir,

$$\phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} , \quad (1.116)$$

y extendemos esta notación a los campos vectoriales y tensoriales, y a derivadas de orden más alto. Si $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar, $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{V}$ es un campo vectorial, y $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{V}^2$ es un campo tensorial, podemos expresar sus operadores diferenciales de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \nabla\phi &= \phi_{,i} \mathbf{e}_i , \\
 \nabla\mathbf{v} &= v_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j , \\
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= v_{i,i} , \\
 \nabla \cdot \mathbf{T} &= T_{ij,j} \mathbf{e}_i , \\
 \nabla \times \mathbf{v} &= \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \mathbf{e}_i , \\
 \nabla \times \mathbf{T} &= \varepsilon_{ikl} T_{lk,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l .
 \end{aligned} \tag{1.117}$$

1.8.1. Aplicación: derivadas de los invariantes principales

Empleando notación indicial, vamos a demostrar que las derivadas de los invariantes principales de un tensor \mathbf{F} invertible son

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{F}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{F}^T, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{F}} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T}. \tag{1.118}$$

La primera identidad se demuestra como sigue:

$$\left(\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{F}} \right)_{ij} = \left(\frac{\partial \operatorname{tr}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)_{ij} = \frac{\partial F_{kl} \delta_{kl}}{\partial F_{ij}} = \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{kl} = \delta_{ij} = (\mathbf{I})_{ij}. \tag{1.119}$$

Para demostrar la segunda identidad de (1.118), comenzamos calculando

$$\left(\frac{\partial \operatorname{tr}(\mathbf{F}^2)}{\partial \mathbf{F}} \right)_{ij} = \frac{\partial}{\partial F_{ij}} (F_{kl} F_{lm}) = \delta_{ik} \delta_{jl} F_{lm} + F_{kl} \delta_{il} \delta_{jm} = 2F_{ji} = 2(\mathbf{F}^T)_{ij}. \tag{1.120}$$

Empleando este resultado y la derivada del invariante I_1 podemos concluir que

$$\left(\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{F}} \right)_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \frac{1}{2} (I_1^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{F}^2)) \right)_{ij} = I_1 \delta_{ij} - F_{ji} = (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{F}^T)_{ij}. \tag{1.121}$$

La tercera identidad de (1.118) es algo más compleja de demostrar. Para ello, recordamos que, de acuerdo al teorema de Cayley-Hamilton, todo tensor \mathbf{F} satisface su propio polinomio característico. Utilizando el operador traza sobre dicho polinomio se obtiene

$$\operatorname{tr}(\mathbf{F}^3) - I_1 \operatorname{tr}(\mathbf{F}^2) + I_2 \operatorname{tr}(\mathbf{F}) - I_3 \operatorname{tr}(\mathbf{I}) = 0, \tag{1.122}$$

por lo que

$$I_3 = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{F}^3) - \frac{I_1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{F}^2) + \frac{I_2}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{F}). \tag{1.123}$$

Las derivadas de $\text{tr}(\mathbf{F})$ y $\text{tr}(\mathbf{F}^2)$ ya están calculadas. Usando el mismo razonamiento se puede comprobar que

$$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{F}^3)}{\partial \mathbf{F}} = 3(\mathbf{F}^T)^2, \quad (1.124)$$

y por tanto

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T = (\mathbf{F}^T)^3 - I_1(\mathbf{F}^T)^2 + I_2 \mathbf{F}^T. \quad (1.125)$$

Sumando y restando $I_3 \mathbf{I}$ en el término de la derecha de esta identidad y empleando, otra vez, el teorema de Cayley-Hamilton para \mathbf{F}^T se demuestra el resultado.

1.9. La transformada de Legendre

La *transformada de Legendre* es una operación muy utilizada en mecánica para cambiar la expresión funcional de una relación constitutiva. Como en termodinámica, esto se debe a que a menudo es conveniente cambiar las variables independientes que describen la respuesta de un material, o el equilibrio [2, 1].

En primer lugar recordamos que una *función convexa* definida sobre un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es aquella que satisface, para todo $x, y \in \Omega$

$$f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y), \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (1.126)$$

Si la desigualdad es estricta cuando $\alpha \in (0, 1)$ entonces se dice que la función f es *estrictamente convexa*. Las funciones convexas gozan de numerosas propiedades, muchas de ellas relacionadas con problemas de optimización [9], por lo que se emplean muy a menudo en la formulación de modelos mecánicos. Dada una función convexa su *transformada de Legendre* f^* es

$$f^*(y) = \max_x (xy - f(x)). \quad (1.127)$$

La transformada f^* se puede calcular de forma explícita en muchas ocasiones y también es una función convexa.

▷ **Ejemplo 1.9.1.** Calcular la transformada de Legendre de $f(x) = \frac{k}{2}x^2$.

Sea $g(x, y) = xy - \frac{k}{2}x^2$, el máximo de esta función para un y dado se obtiene resolviendo $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0$, que resulta $x = y/k$. Por ello,

$$f^*(y) = \max_x g(x, y) = g(y/k, y) = \frac{y^2}{2k}. \quad (1.128)$$

La transformada de Legendre cuenta con numerosas propiedades que hacen de ella una herramienta muy útil en matemática, física, termodinámica, etc. Por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa y f^* su transformada de Legendre entonces se verifica que

$$y = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \Leftrightarrow x = \frac{\partial f^*}{\partial y}(y). \quad (1.129)$$

1.10. Cálculo variacional

Además del cálculo integral y diferencial, el cálculo de variaciones o **cálculo variacional** resulta de gran utilidad para el desarrollo de la mecánica de medios continuos y, en especial, para la mecánica de sólidos. Este tipo de cálculo sirve para identificar condiciones de estacionariedad (mínimos, máximos o puntos de ensilladura) en funcionales diferenciables, es decir, “funciones de funciones”.

Antes de comenzar el estudio de optimización de funcionales recogemos un resultado preliminar que se usa en la demostración de teoremas, no sólo en cálculo variacional y que se conoce con el nombre del **lema fundamental del cálculo variacional**. Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^3 , $\partial_1\Omega \subseteq \partial\Omega$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \, dV - \int_{\partial_1\Omega} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \, dA = 0 \quad (1.130)$$

para cualquier función $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, entonces f es idénticamente nula en Ω y en $\partial_1\Omega$. Este resultado se demuestra por contradicción. Supongamos que la identidad (1.130) se cumple, pero que f no sea idénticamente nula. Comenzamos demostrando que f es nula en el interior del dominio. Si no lo fuera, es porque existe un subdominio $\omega \subset \Omega$ donde f es, por ejemplo, positiva (la demostración es idéntica si f fuera negativa en ω). Entonces, bastaría con escoger $\phi = f$ en ω y cero en el resto de Ω , y también en $\partial\Omega$ para obtener

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \, dV = \int_{\Omega} f^2(\mathbf{x}) \, dV > 0, \quad (1.131)$$

contradiciendo la hipótesis (1.130). Una vez que se ha concluido que la función es nula en el interior, por continuidad también ha de serlo en todos los puntos del contorno. La demostración de este resultado para funciones que no son continuas sino que pertenecen a espacios funcionales más grandes se puede encontrar en la bibliografía especializada [3]. En estos apuntes, sin embargo, supondremos siempre que los campos son diferenciables así que la hipótesis de continuidad es adecuada.

Obsérvese que de manera sencilla se puede extender el resultado anterior a campos vectoriales y tensoriales.

Si \mathcal{F} es un espacio vectorial de funciones, un **funcional** es una aplicación $I : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$. Por ejemplo, si \mathcal{F} es el espacio de funciones reales de variable real definidas en $[0, 1]$, el funcional $I[u] = \int_0^1 u \, dx$ calcula el área (con signo) bajo la función $u \in \mathcal{F}$. Otros funcionales calculan distancia, tiempo, inercia, energía, etc.

Si $I : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional que posee un mínimo en \bar{v} , entonces $I[\bar{v}] \leq I[v]$ para cualquier $v \in \mathcal{F}$. Además, si este funcional es diferenciable, entonces

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} I[\bar{v} + \epsilon u] = 0, \quad (1.132)$$

para cualquier $u \in \mathcal{F}$ ². Esta condición, que debe de evaluarse para cada funcional I , da lugar a una ecuación diferencial llamada la **ecuación de Euler-Lagrange** del funcional, que caracteriza su punto estacionario.

▷ **Ejemplo 1.10.1.** Si \mathcal{F} es el espacio (afín) de todas las funciones v diferenciables en $[0, 1]$ tales que $v(0) = 0, v(1) = 1$, encontrar la que minimiza el funcional

$$I[v] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(v')^2 - v \right) dx$$

Si u es una función tal que $u(0) = u(1) = 0$ entonces

$$0 = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} I[v + \epsilon u] = \int_0^1 (v' u' - u) \, dx.$$

Integrando por partes se obtiene

$$0 = \int_0^1 (-v'' - 1) u \, dx,$$

identidad que sólo se cumple para todo u si el integrando es nulo, es decir,

$$-v'' = 1.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, y utilizando las condiciones de contorno, se concluye que

$$v(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x.$$

◁

▷ **Ejemplo 1.10.2.** Una bola se encuentra a una altura H y se desea colocar un tobogán de forma que ésta descienda en el mínimo tiempo posible hasta

²Si \mathcal{F} es un espacio afín sobre el espacio vectorial \mathcal{G} , entonces $I : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ es mínimo si la ecuación (1.132) se cumple para todo $u \in \mathcal{G}$.

un punto a distancia L sobre el suelo. Determinar la ecuación de la curva que une los dos puntos.

El tiempo que tarda la bola en llegar al suelo desde la posición inicial se puede calcular empleando la ecuación de la conservación de la energía y resulta

$$T[y] = \int_0^L \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{H - y}} \, dx,$$

siendo $y : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface $y(0) = H, y(L) = 0$. La ecuación de Euler-Lagrange para este funcional es

$$\frac{1 + (y'(x))^2}{2g(x)y^2(x)} + \frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{g(x)y(x)}$$

con $g(x) = (-1 - (y'(x))^2)^{1/2}$. ◁

1.11. Linealización

En la mecánica de medios continuos, así como en muchas otras ramas de la ciencia, aparecen ecuaciones no lineales que representan el comportamiento de un sistema físico que se desea estudiar. Precisamente debido a esta no linealidad, dichas ecuaciones son muy complejas de resolver. Sin embargo, a menudo no es necesario obtener su solución completa y bastaría con conocer su solución en un rango pequeño de aplicación. La **linealización** de una ecuación no lineal consiste en su aproximación por otra, esta última afín, mucho más sencilla pero que puede ser válida para un cierto rango.

De manera abstracta, sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Entonces, por el teorema de Taylor,

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \mathcal{O}(|x - \bar{x}|^2). \quad (1.133)$$

La linealización de la función f alrededor del punto \bar{x} es simplemente la parte afín de su expansión en serie de Taylor, es decir,

$$\text{Lin}[f](u) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})u \quad (1.134)$$

donde u sustituye al incremento $x - \bar{x}$.

▷ **Ejemplo 1.11.1.** La linealización de la función $f(x) = \exp(x)$ en $x = 1$ es

$$\text{Lin}[\exp](u) = \exp(1) + \exp(1)u.$$

◁

La linealización de funciones no se limita al caso escalar. Si $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable, entonces su linealización en $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ es

$$\text{Lin}[\mathbf{f}](\bar{\mathbf{x}})\mathbf{u} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + D\mathbf{f} \mathbf{u} , \quad (1.135)$$

siendo $D\mathbf{f}$ la llamada *matriz tangente* de la función \mathbf{f} , cuyas componentes son

$$(D\mathbf{f})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{\mathbf{x}}) . \quad (1.136)$$

▷ **Ejemplo 1.11.2.** Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida en coordenadas cartesianas como

$$\{\mathbf{f}(x, y)\} = \left\{ \begin{array}{l} x + \sin(x + y) \\ y + xy \end{array} \right\} .$$

Su linealización en el punto $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 2)$ es la función afín

$$\text{Lin}[\mathbf{f}](1, 2) \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + \sin(3) \\ 4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \cos 3 & \cos(3) \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} .$$

◁

Resumen de fórmulas importantes

Matriz de cambio de base	$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j$
Cambio de base de vector	$\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}} = [A]\{\mathbf{v}\}_{\mathcal{B}'}$
Cambio de base de tensor	$\{\mathbf{T}\}_{\mathcal{B}} = [A]\{\mathbf{T}\}_{\mathcal{B}'}[A]^T$
Tensor hemisimétrico asociado	$\hat{\mathbf{v}}\mathbf{a} = \mathbf{v} \times \mathbf{a}$
Producto diádico	$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$
Invariantes principales	$I_1(\mathbf{F}) = \text{tr}(\mathbf{F})$ $I_2(\mathbf{F}) = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{F}^2))$ $I_3(\mathbf{F}) = \det \mathbf{F}$
Derivadas de los invariantes	$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{I}$ $\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{F}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{F}^T$ $\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{F}} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T}$
Producto vectorial	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k$
Gradiente (cartesianas)	$\nabla_{\mathbf{x}} f = f_{,i} \mathbf{e}_i$
Gradiente (cartesianas)	$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = v_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$
Divergencia (cartesianas)	$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = v_{i,i}$
Divergencia (cartesianas)	$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} = T_{ij,j} \mathbf{e}_i$
Rotacional (cartesianas)	$\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v} = \epsilon_{ijk} v_{j,i} \mathbf{e}_k$
Igualdad $\delta - \epsilon$	$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ipq} = \delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}$
Vector axial	$\text{axial}[\mathbf{H}] = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} H_{ik} \mathbf{e}_j$
Tensor hemisimétrico	$\hat{h}_{ij} = \epsilon_{ikj} h_k$

Problemas

Problema 1.1. Sean ϕ , \mathbf{v} , \mathbf{A} , respectivamente, un campo escalar, uno vectorial y uno tensorial, calcular

$$i) \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) \quad ii) \nabla(\phi \mathbf{v}) \quad iii) \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) \quad iv) \nabla \cdot (\mathbf{A} \mathbf{v})$$

Problema 1.2. Si \mathbf{u} es un vector unitario y \mathbf{a} un vector cualquiera, demostrar que

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{u}) = \mathbf{P} \mathbf{a},$$

siendo \mathbf{P} un tensor de segundo orden simétrico de expresión $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$. A continuación, demostrar que \mathbf{P} es una proyección, es decir, que $\mathbf{P} \mathbf{P} = \mathbf{P}$. En ambas demostraciones sólo se pueden emplear operaciones y propiedades intrínsecas, es decir, evitando en todo momento el uso de componentes.

Problema 1.3. Se consideran dos bases de \mathbb{R}^3 , a saber, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$ verificándose

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{e}_1 + \sqrt{3} \mathbf{e}_2}{2}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{\mathbf{e}_2 - \sqrt{3} \mathbf{e}_1}{2}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3.$$

- Calcular la matriz de cambio de base.
- Sea el tensor \mathbf{T} con matriz en la base \mathcal{B} :

$$[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}},$$

calcular la expresión matricial de este tensor en la base $\tilde{\mathcal{B}}$.

- Comprobar que los tres invariantes principales de \mathbf{T} coinciden cuando se calculan a partir de sus expresiones matriciales en las dos bases consideradas.

Problema 1.4. Un campo de velocidades tiene por expresión en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 \mathbf{e}_1 + (x_2^2 - x_1 x_3) \mathbf{e}_2 + x_2 x_3 \mathbf{e}_3.$$

Se pide:

- Calcular las componentes del campo \mathbf{v} en coordenadas cilíndricas.
- Comprobar que la divergencia de \mathbf{v} en el punto $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ tiene el mismo valor en los dos sistemas de coordenadas empleados.

- c) Calcular el gradiente de \mathbf{v} en coordenadas cilíndricas en el punto $(r, \theta, z) = (1, 0, 1)$ de dos maneras distintas: a) usando la expresión del gradiente en estas coordenadas, b) calculando el gradiente en coordenadas cartesianas y efectuando un cambio de coordenadas del tensor resultante.

Problema 1.5. Para cualquier tensor \mathbf{T} de segundo orden, demuestra las siguientes relaciones utilizando únicamente operaciones intrínsecas:

$$a) \mathbf{I} : \mathbf{T} = \text{tr}[\mathbf{T}], \quad b) \mathbf{T}^{esf} : \mathbf{T}^{des} = 0, \quad c) \mathbf{T}^s : \mathbf{T}^a = 0.$$

Problema 1.6. Los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} tienen las siguientes componentes en una base cartesiana

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Se considera ahora la base $\tilde{\mathcal{B}} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ con

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j}), \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}), \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}.$$

- a) Calcular la matriz de cambio de base.
 b) Calcular las componentes de \mathbf{a} y \mathbf{b} en la base $\tilde{\mathcal{B}}$
 c) Comprobar que el producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es el mismo en las dos bases consideradas.

Problema 1.7. Comprueba que, para cualquier campo escalar $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\nabla \times \nabla \phi = \mathbf{0}.$$

Problema 1.8. Demuestra las identidades

$$a) \mathbf{A} : (\mathbf{BC}) = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}) : \mathbf{C} \quad b) \mathbf{A} : \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\mathbf{Ab}) \cdot \mathbf{a}.$$

siendo $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ tensores de segundo orden y \mathbf{a}, \mathbf{b} , vectores.

Problema 1.9. Sea \mathbf{S} un tensor de orden dos. Demuestra que:

- a) Si \mathbf{S} es simétrico, definido positivo sus autovalores son positivos.
 b) Si \mathbf{S} es simétrico, semi-definido positivo sus autovalores son no negativos.
 c) Si \mathbf{S} es regular, todos sus autovalores son no nulos.
 d) Si \mathbf{S} es antisimétrico, al menos un autovalor es nulo.

e) Si \mathbf{S} es una rotación, pero no es el tensor identidad, tiene un autovalor real y dos complejos.

Problema 1.10. Si $\text{desv}[\]$ es la operación que obtiene la parte desviadora de un tensor, demuestra la identidad:

$$\text{desv}[(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})\mathbf{A}] = \mathbf{0} .$$

Problema 1.11. Si \mathbf{a}, \mathbf{b} son dos vectores cualesquiera y $\mathbf{a} = \text{axial}[\mathbf{A}]$, $\mathbf{b} = \text{axial}[\mathbf{B}]$ comprueba que

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} .$$

Problema 1.12. Demuestra las identidades

$$a) \nabla \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T}^T : \nabla \mathbf{v} . \quad b) \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = \widehat{\mathbf{a}} ,$$

siendo \mathbf{T} un campo tensorial, \mathbf{v} un campo vectorial, \mathbf{a} un vector constante y $\mathbf{r} = \sum_i^3 x_i \mathbf{e}_i$.

Problema 1.13. Empleando el teorema de Gauss para campos vectoriales (la identidad (1.92)), demuestra dicho teorema para campos tensoriales (la identidad (1.93)), la expresión vectorial de la fórmula de la integral por partes (la identidad (1.94)) y su correspondiente versión tensorial (1.95).

Problema 1.14. Demuestra, a partir de la definición intrínseca de la función determinante,

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

Problema 1.15. Si \mathbf{a} es un vector cualquiera y \mathbf{u} un vector unitario, demuestra

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{u} .$$

Problema 1.16. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa y f^* su transformada de Legendre, demuestra que para cualquier pareja $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + f^*(y) \geq xy .$$

Problema 1.17. Calcula la transformada de Legendre de

$$a) f(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad b) g(x) = e^x .$$

Problema 1.18. Siendo \mathbf{a} y \mathbf{b} dos vectores cualesquiera, demostrar la siguiente identidad empleando notación indicial

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 .$$

Problema 1.19. Demuestra las siguientes identidades usando notación indicial:

- a) $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$, para toda función escalar ϕ .
- b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$, para todo campo vectorial \mathbf{a} .
- c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, siendo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vectores.
- d) $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} : \hat{\mathbf{a}} = 0$, para cualquier vector \mathbf{a} .
- e) $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{I}$, siendo \mathbf{n} un vector unitario.

Problema 1.20. Sea $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una curva cualquiera en el plano con extremos (a, A) y (b, B) . Demostrar, usando cálculo variacional, que la curva que conecta estos dos puntos y que tiene menor longitud

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + |y'(x)|^2} dx$$

es una línea recta.

Problema 1.21. Demostrar el teorema de la divergencia para tensores de orden tres: Si \mathbf{T} es un tensor de orden tres, entonces, para cualquier región $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$,

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{T} dV = \int_{\partial \mathcal{R}} \mathbf{T} \mathbf{n} dA ,$$

siendo \mathbf{n} el vector unitario normal al contorno de \mathcal{R} en cada uno de sus puntos. Emplear este teorema para demostrar que si \mathbf{v} es un campo vectorial definido en \mathcal{R} entonces

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \mathbf{v} dV = \int_{\partial \mathcal{R}} \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} dA .$$

Problema 1.22. Sean \mathbf{a}, \mathbf{b} dos vectores y f la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\mathbf{v}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{v} .$$

- a) Comprobar que la función f es lineal.
- b) Encontrar la expresión del tensor \mathbf{T} tal que $\mathbf{T}\mathbf{v} = f(\mathbf{v})$.

Problema 1.23. Sea \mathbf{T} un campo de tensores definido en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que verifica $\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}$ en Ω y $\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{t}$ en el contorno $\partial\Omega$. Demostrar, empleando el teorema de Gauss, que

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{T} dV = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x} dA .$$

(Ayuda: usar el teorema de Gauss para el tensor $\mathbf{S} = \mathbf{T}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})$, siendo \mathbf{a} un vector constante y \mathbf{x} el vector de posición del punto.

Problema 1.24. Demuestra que si \mathbf{S} es un tensor simétrico de segundo orden con autovalores y autovectores $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ su parte desviadora

$$\mathbf{D} = \mathbf{S} - \frac{\text{tr}[\mathbf{S}]}{3} \mathbf{I}$$

tiene los mismos autovectores. Encuentra, además, la expresión de los autovalores correspondientes.

Problema 1.25. Demostrar que si \mathbf{R} es un tensor de rotación y \mathbf{a}, \mathbf{b} son dos vectores cualesquiera, entonces

$$(\mathbf{R}\mathbf{a}) \times (\mathbf{R}\mathbf{b}) = \mathbf{R}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Problema 1.26. Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} dos tensores de segundo orden arbitrarios definimos su producto vectorial como el tensor $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ con expresión

$$\mathbf{C} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} A_{il} B_{jm} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_n .$$

Demostrar que el tensor adjunto $\text{adj}(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}$ de un tensor \mathbf{F} de segundo orden se puede calcular como

$$\text{adj}(\mathbf{F}) = \frac{1}{2} \mathbf{F} \times \mathbf{F} .$$

Nótese que esta definición del tensor adjunto no emplea el tensor inverso con lo cual es válida incluso cuando el tensor \mathbf{F} sea singular.

Problema 1.27. Sea \mathbf{u} un vector unitario y $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ una proyección. Comprobar que la base principal de \mathbf{P} la forman $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, donde \mathbf{v} y \mathbf{w} son dos vectores unitarios cualesquiera pero ortogonales entre sí y ortogonales a \mathbf{u} .

Calcular los tres autovalores de \mathbf{P} y demuestra que $|\mathbf{P}\mathbf{a}| \leq |\mathbf{a}|$ para cualquier vector \mathbf{a} .

Problema 1.28. Demostrar que, para tres vectores cualesquiera $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ se verifica

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \otimes \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} = [\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}] \mathbf{I} .$$

Problema 1.29. Sea Ω una región de \mathbb{R}^3 con contorno Γ y \mathbf{v}, \mathbf{w} dos campos vectoriales definidos en Ω . Demostar que

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \, dA = \int_{\Omega} [(\nabla \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{w}] \, dV .$$

Problema 1.30. Calcula los autovalores y autovectores de los tensores \mathbf{A} y \mathbf{B} definidos como

$$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} , \quad \mathbf{B} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} ,$$

siendo \mathbf{m}, \mathbf{n} dos vectores unitarios ortogonales entre sí y α, β dos escalares.

Problema 1.31. Un tensor de segundo orden Q es una rotación si su transpuesto es igual a su inverso y si, además, su determinante es $\det Q = 1$. Demostrar que las rotaciones son isometrías, es decir, que para cualesquiera vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} ,

$$|Q\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|, \quad \text{ángulo}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{ángulo}(Q\mathbf{a}, Q\mathbf{b}).$$

Bibliografía

- [1] V. I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer, New York, 1989.
- [2] H. B. Callen. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. Wiley, United States, second edition, 1985.
- [3] B. Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Springer, 2008. ISBN 9780387357799.
- [4] K. D. Hjelmstad. *Structural mechanics*. Springer Science+Business Media, second edition, 2005.
- [5] L. E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium*, volume 129. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- [6] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.
- [7] G. E. Mase. *Continuum Mechanics*. McGraw-Hill, 1970.
- [8] X. Oliver and C. Agelet de Saracibar. *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Ediciones UPC, 2000.
- [9] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*, volume 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [10] I. Romero and J. J. Arribas. A taxonomy of polar decompositions for singular second order tensors in \mathbb{R}^3 . *Archives of Mechanics*, 61(5):383–390, 2009.
- [11] R. Shaw and F. J. Yeadon. On $(a \times b) \times c$. *The American Mathematical Monthly*, 96(7):623, 1989.
- [12] W. S. Slaughter. *The linearized theory of elasticity*. Birkhauser, Boston, 2002.
- [13] A. M. Stuart and O. Gonzalez. *A first course in continuum mechanics*. Cambridge University Press, 2008.

Capítulo 2

Cinemática de medios continuos

Este capítulo trata de la descripción de los movimientos de los cuerpos continuos. El punto de vista que se adopta en la Mecánica de Medios Continuos es el de estudiar estos movimientos en su mayor generalidad posible, sin restricciones en relación a su tamaño. Si bien hay teorías muy útiles que son válidas para pequeñas deformaciones, por ejemplo la de elasticidad clásica o estructuras [2], su aplicación es más limitada con lo que el objetivo de la Mecánica de Medios Continuos, aunque ambicioso, permite estudiar muchos mas problemas y tipos de cuerpos.

El punto de partida para esta descripción es la definición precisa de lo que se entiende por “cuerpo continuo” desde el punto de vista matemático. Este formalismo ha permitido describir de forma unificada una gran cantidad de cuerpos físicos de gran utilidad en ingeniería y se discute en la introducción.

Los conceptos de la cinemática pertenecen fundamentalmente a la geometría, y más concretamente a la geometría diferencial [1]. La metodología y el formalismo presentados en este capítulo permitirán describir de forma cuantitativa no sólo los movimientos de los sólidos deformables sino también sus deformaciones locales. Esta generalidad permitirá, cuando se estudie las leyes de balance y los modelos constitutivos, plantear completamente las ecuaciones que rigen el movimiento de una gran variedad de cuerpos deformables.

2.1. Los cuerpos continuos y sus configuraciones

La Mecánica de Medios Continuos tiene como objeto último el estudio matemático de problemas mecánicos que involucran cuerpos físicos. Para poder describir matemáticamente dichos cuerpos es necesario definir de forma precisa qué se entiende por “cuerpo” y delimitar cuáles son los cuerpos que pueden ser estudiados en esta disciplina.

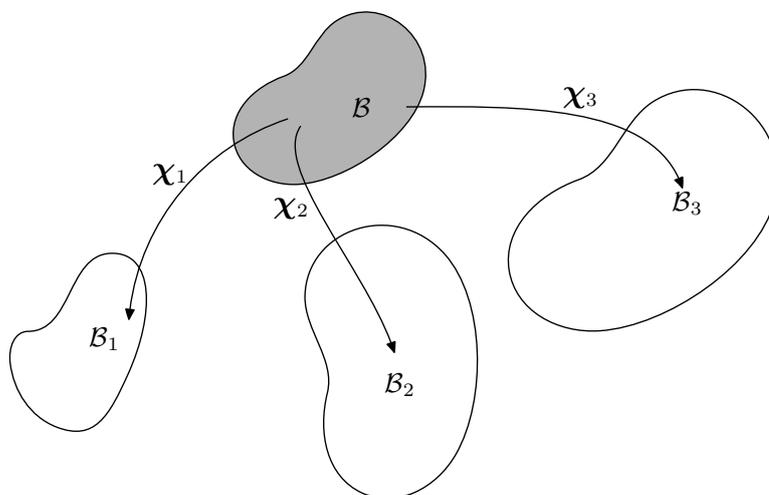


Figura 2.1: Un cuerpo continuo y algunas de sus posibles configuraciones.

Los cuerpos físicos están formados por moléculas y estas por átomos. Si se observa un cuerpo cualquiera, sólido o líquido, a través de un microscopio potente se aprecia que los átomos se encuentran separados unos de otros. De manera informal se podría decir que, vistos de cerca, los cuerpos físicos se asemejan conjuntos de bolas que se disponen de manera más o menos regular, pero espaciada. En otras palabras, a nivel atómico, la materia es discontinua. Sin embargo, si se observa un cuerpo a simple vista, o con un microscopio menos potente, parece sin embargo que la materia que lo conforma es continua.

Aunque sabemos que la materia no es continua, podemos suponer, para su estudio, que lo es. Esto es claramente una aproximación, pero si los problemas que interesa analizar involucran cuerpos cuyas dimensiones son mucho mayores que los átomos, la aproximación es muy buena. Esta aproximación es la hipótesis de partida de la Mecánica de Medios Continuos. Resulta enormemente útil pues permite resolver (aproximadamente) un gran número de problemas prácticos apoyándose en herramientas de cálculo integral y diferencial. Hay que resaltar otra vez que se trata de una aproximación muy buena para problemas cotidianos pero deja de ser válida a escala atómica.

Matemáticamente un **cuerpo continuo** se define como un conjunto \mathcal{B} de partículas, denominadas P_1, P_2, \dots , con una propiedad especial: existe un conjunto de aplicaciones biyectivas y diferenciables $\mathcal{K} = \{\chi_\alpha\}$ que transforman \mathcal{B} en conjuntos abiertos de \mathbb{R}^3 . Es decir, para toda partícula $P \in \mathcal{B}$

$$\mathbf{x} = \chi(P) \in \mathbb{R}^3, \quad \chi(\mathcal{B}) = \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^3, \text{abierto}, \quad \text{y} \quad \chi^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{B}, \quad (2.1)$$

y además, para dos aplicaciones cualesquiera $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{K}$ la composición

$$\varphi_{12} : \chi_1(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \chi_2(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \varphi_{12} = \chi_2 \circ \chi_1^{-1} \quad (2.2)$$

es diferenciable. Cada una de estas infinitas aplicaciones χ se llama una **configuración**.

La definición anterior quiere indicar que cada partícula del cuerpo se puede asociar a un punto de \mathcal{O} , un subconjunto de \mathbb{R}^3 , y viceversa. Como \mathbb{R}^3 no tiene “agujeros” (es continuo), la definición anterior implica la continuidad de la materia que constituye \mathcal{B} , como indica la hipótesis fundamental de la Mecánica de Medios Continuos.

En la definición anterior se indica claramente que existe un número infinito de configuraciones posibles para el cuerpo \mathcal{B} . De entre todas ellas, elegimos una que llamamos χ_{ref} y la denominamos la **configuración de referencia**. Esta configuración se llama así porque va a permitir referenciar cómodamente cada partícula $P \in \mathcal{B}$ como se indica a continuación: es incómodo denominar P_1, P_2, P_3, \dots a cada partícula del cuerpo \mathcal{B} . Sin embargo, la configuración de referencia define una relación biunívoca entre las partículas del cuerpo y los puntos de un cierto conjunto abierto $\mathcal{B}_{ref} := \chi_{ref}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3$. Por ello, dado un sistema de coordenadas cualquiera para \mathbb{R}^3 , a cada partícula P del cuerpo le corresponde un único trío de coordenadas (X_1, X_2, X_3) , y viceversa. Aunque son cosas distintas, se pueden identificar partículas del cuerpo con puntos de $\mathcal{B}_{ref} \in \mathbb{R}^3$. Cada terna (X_1, X_2, X_3) es, en cierto modo, el “nombre” de un partícula P del cuerpo y se llaman las **coordenadas materiales** del punto P . Aunque la configuración de referencia puede ser cualquiera, resulta conveniente emplear como tal la correspondiente al cuerpo sin deformar, la llamada **configuración indeformada**.

El problema básico de la Mecánica de Medios Continuos consiste en estudiar las causas y los efectos que hacen que un cuerpo cuya configuración de referencia es χ_{ref} se transforme hasta situarse en una configuración deformada χ_{def} . Por ejemplo, una cuerda sujeta entre dos puntos tiene una configuración de referencia tal que $\mathcal{B}_{ref} = \chi_{ref}(\mathcal{B})$ que coincide con una recta entre los dos puntos que la sujetan y una configuración deformada tal que $\mathcal{B}_{def} = \chi_{def}(\mathcal{B})$ es una cicloide que pasa por dicho puntos.

Para concluir esta sección indicamos que es corriente utilizar la expresión “configuración” para referirse al conjunto imagen de una de ellas, es decir, $\chi(\mathcal{B})$. Siendo conscientes de ello, su uso está tan extendido que no se considera incorrecto.

2.2. El campo de deformación de un medio continuo

Las configuraciones de referencia y deformada definen una aplicación entre \mathcal{B}_{ref} y \mathbb{R}^3 que se denomina **deformación**:

$$\varphi : \mathcal{B}_{ref} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi := \chi_{def} \circ \chi_{ref}^{-1}. \quad (2.3)$$

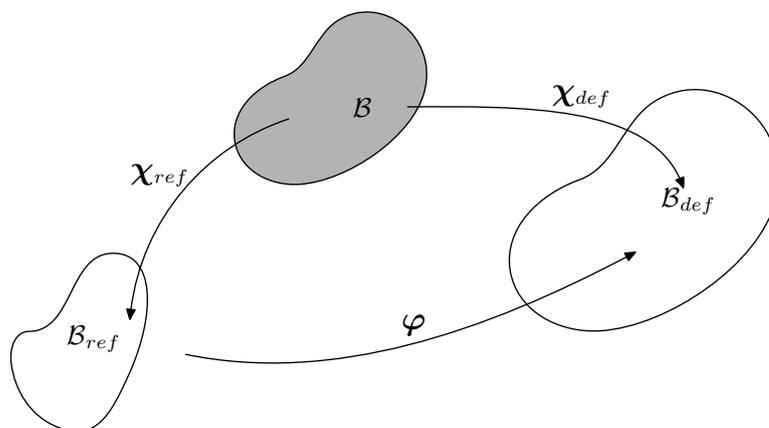


Figura 2.2: El campo de deformación de un medio continuo.

La deformación es una función que opera entre conjuntos de \mathbb{R}^3 y es muy útil, pues hace innecesario referirse constantemente al cuerpo físico \mathcal{B} . De hecho, aunque hayamos definido previamente el concepto de cuerpo y de configuraciones, la deformación es el concepto más importante para el tratamiento matemático de la cinemática de medios continuos. A partir de ahora no volveremos a emplear configuraciones ni conjuntos abstractos de puntos sino subconjuntos de \mathbb{R}^3 y aplicaciones entre ellos, es decir, deformaciones. Es sobre estas últimas sobre las que podemos aplicar el cálculo diferencial e integral usual, pues es simplemente el cálculo en \mathbb{R}^3 .

Un punto genérico en la configuración de referencia se conoce con el nombre de *partícula* y se indica con el símbolo \mathbf{X} ; sus coordenadas, como se indicó en la sección 2.2, son la terna (X_1, X_2, X_3) . De manera análoga, un punto genérico en la configuración deformada se conoce como una *posición* y se indicará como \mathbf{x} ; sus coordenadas en el espacio serán la terna (x_1, x_2, x_3) . Así pues se tiene que la deformación es la aplicación que satisface

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B}_{ref} \quad (2.4)$$

o empleando notación indicial

$$x_i = \varphi_i(X_1, X_2, X_3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

Nótese que estas dos últimas expresiones son válidas para cualquier sistema de coordenadas en \mathcal{B}_{ref} y \mathcal{B}_{def} ; no hay ninguna razón además por la que estos sistemas de coordenadas tengan que ser iguales.

Como los sistemas de coordenadas en las dos configuraciones pueden ser distintos, llamaremos a sus bases, respectivamente, $\{\mathbf{E}_I\}$ y $\{\mathbf{e}_i\}$. Así, un vector en la configuración de referencia y otro en la configuración actual siempre se escribirán, respectivamente, como

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{\dim} A_I \mathbf{E}_I, \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{\dim} v_i \mathbf{e}_i. \quad (2.6)$$

La deformación es el objeto cinemático fundamental pues proporciona la posición de cada partícula de cuerpo (identificada con su posición en \mathcal{B}_{ref}). En la mayoría de los problemas mecánicos esta función no se conoce y la resolución de dicho problema consiste en hallar dicha función a partir de las fuerzas exteriores aplicadas. En este capítulo, sin embargo, supondremos que φ es conocida y deduciremos a partir de ella otras cantidades cinemáticas de interés.

Las funciones φ que definen los campos de deformación de los medios continuos pueden ser muy variadas, pero existen varias restricciones que han de cumplir. En primer lugar, como composición de dos configuraciones, han de ser funciones diferenciables. En segundo lugar han de ser *inyectivas*. Esto quiere decir que si \mathbf{X} e \mathbf{Y} son dos puntos distintos del interior de \mathcal{B}_{ref} , entonces $\varphi(\mathbf{X}) \neq \varphi(\mathbf{Y})$. Lo que indica esta condición es que dos puntos no pueden deformarse de forma que acaben en la misma posición pues la materia es siempre impenetrable.

En algunos casos resulta útil referirse también al campo de **desplazamientos**, especialmente para la teoría de deformaciones infinitesimales. Para introducir correctamente este concepto necesitamos primero definir una operación que lleve vectores de la configuración de referencia al espacio físico. Esta operación, que llamamos **transporte**, se denomina Σ y se define, para cualquier vector $\mathbf{v} = v_A \mathbf{E}_A$ de la siguiente manera:

$$\Sigma \mathbf{v} = \Sigma v_A \mathbf{E}_A = v_A \mathbf{e}_A . \quad (2.7)$$

Ahora, empleando este operador se puede definir el campo de desplazamientos como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x}) - \Sigma \varphi^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \Sigma \mathbf{X} . \quad (2.8)$$

La interpretación geométrica de este campo es que representa el vector que une las posiciones sin deformar y deformada de cada partícula, cuando ambas posiciones pertenecen a un mismo espacio.

2.2.1. Operadores diferenciales en las dos configuraciones

En toda la Mecánica de Medios Continuos se trabaja con campos definidos en la configuración de referencia, en la configuración deformada y, en algún caso, con tensores de dos puntos. Los objetos definidos en la configuración de referencia se denominan **materiales**; los definidos en la configuración deformada, **espaciales**. Estas denominaciones no son universales y pueden cambiar según los libros. Como las coordenadas en la configuración de referencia y la deformada son distintas, cuando se define un operador diferencial es necesario especificar qué espacio es el que se usa.

Sobre un campo material, por ejemplo una función $G : \mathcal{B}_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$, un campo vectorial $\mathbf{v} : \mathcal{B}_{ref} \rightarrow \mathbb{R}^3$, o un campo tensorial $\mathbf{T} : \mathcal{B}_{ref} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ se pueden definir operadores diferenciales que se denominan operadores materiales y se denotan como $\nabla_{\mathbf{X}}, \nabla_{\mathbf{X}} \cdot, \nabla_{\mathbf{X}} \times$. Por ejemplo, el operador gradiente

del campo escalar G y del campo vectorial \mathbf{v} , si las coordenadas en \mathcal{B}_{ref} fueran cartesianas, tendrían expresión:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{X}}f(\mathbf{X}) &= \frac{\partial f}{\partial X_i}(\mathbf{X}) \mathbf{E}_i, \\ \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{v}(\mathbf{X}) &= \frac{\partial v_i}{\partial X_j}(\mathbf{X}) \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j.\end{aligned}\tag{2.9}$$

De manera análoga, las divergencias materiales de este campo vectorial y campo tensorial son

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{X}) &= \frac{\partial v_i}{\partial X_i}(\mathbf{X}), \\ \nabla_{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{T}(\mathbf{X}) &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j}(\mathbf{X}) \mathbf{E}_i,\end{aligned}\tag{2.10}$$

Sobre objetos espaciales también se pueden definir operadores diferenciales que también se llaman espaciales usando el símbolo $\nabla_{\mathbf{x}}$. Como antes, si hay una función $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, un campo vectorial $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, o un campo tensorial $\mathbf{t} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, se definen, usando coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) &= \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \\ \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \\ \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \\ \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{t}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i,\end{aligned}\tag{2.11}$$

Como la deformación φ relaciona puntos en \mathcal{B}_{ref} y $B_{def} \subset \mathbb{R}^3$, los operadores diferenciales materiales y espaciales en puntos correspondientes están también relacionados. Por ejemplo, consideremos un función $g : \mathcal{B}_{def} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y definamos $G : \mathcal{B}_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$G = g \circ \varphi,\tag{2.12}$$

o lo que es lo mismo, $G(\mathbf{X}) = g(\varphi(\mathbf{X}))$. Entonces se cumple que

$$\nabla_{\mathbf{X}}G(\mathbf{X}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ \varphi\right) \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_A} \mathbf{E}_A = \mathbf{F}^T(\nabla_{\mathbf{x}}g \circ \varphi),\tag{2.13}$$

siendo \mathbf{F} el tensor con componentes $F_{jA} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_A}$ (véase la sección 2.3). Se pueden construir relaciones entre los distintos operadores en las dos configuraciones de manera análoga, sin más que emplear la regla de la cadena.

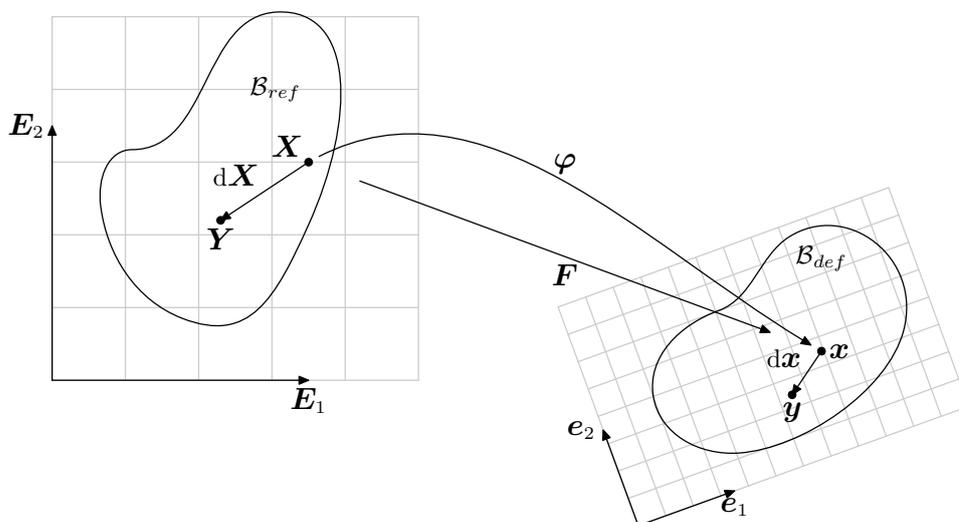


Figura 2.3: Interpretación geométrica del gradiente de deformación.

2.3. El gradiente de deformación

El primer objeto derivado de la deformación es el **gradiente de deformación**, un tensor de segundo orden, de dos puntos, definido como

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \nabla_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{X}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_A}(\mathbf{X}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_A = F_{iA}(\mathbf{X}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_A . \quad (2.14)$$

Este objeto define la relación entre elementos diferenciales de la configuración sin deformar y los de la deformada, es decir, es un tensor de dos puntos. Más concretamente, si $d\mathbf{X}$ es un vector diferencial situado en el punto \mathbf{X} de la configuración de referencia y $d\mathbf{x}$ es el vector que resulta de la deformación de $d\mathbf{X}$ se cumple que

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} . \quad (2.15)$$

La figura 2.3 ilustra esta interpretación geométrica.

Para demostrar que en efecto el gradiente de deformación es el responsable de la transformación de vectores diferenciales entre la configuración de referencia y la deformada, considérense dos puntos \mathbf{X} y \mathbf{Y} muy próximos en la configuración de referencia tal que $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + d\mathbf{X}$. Después de la deformación φ , estos dos puntos ocupan las posiciones $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X})$ e $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{Y})$. Si llamamos $d\mathbf{x}$ al vector $d\mathbf{X}$ deformado que va de \mathbf{x} a \mathbf{y} se tiene que,

utilizando un desarrollo en serie

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{x} &= \mathbf{y} - \mathbf{x} \\
 &= \varphi(\mathbf{Y}) - \varphi(\mathbf{X}) \\
 &= \varphi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \varphi(\mathbf{X}) \\
 &= \varphi(\mathbf{X}) + \frac{\partial \varphi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} + \mathcal{O}(|d\mathbf{X}|^2) - \varphi(\mathbf{X}) \\
 &= \mathbf{F}(\mathbf{X}) d\mathbf{X}.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

▷ **Ejemplo 2.3.1.** Considérese la deformación de un cuerpo sólido que ocupa, en su configuración de referencia, el cubo $(0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$. El cuerpo se encuentra deformado con una función de deformación φ que transforma coordenadas cartesianas X_A en la configuración de referencia a coordenadas cartesianas en la configuración deformada con expresiones

$$x_1 = X_1 + \gamma X_2, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3 .$$

La representación matricial del gradiente de deformación en la base $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j\}$ es

$$[\mathbf{F}(\mathbf{X})] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Su representación intrínseca es:

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \gamma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3 . \tag{2.17}$$

◁

▷ **Ejemplo 2.3.2.** Considerar ahora la deformación del mismo cuerpo pero con otra deformación φ que se expresa ahora en función de las coordenadas cartesianas X_A en la configuración de referencia y da el valor de las coordenadas cilíndricas en la configuración deformada

$$r = X_1 + X_2 + \alpha X_3, \quad \theta = \beta X_1 + \alpha X_3, \quad z = \alpha X_1 - \beta X_3.$$

La matriz del tensor de dos puntos \mathbf{F} es ahora

$$[\mathbf{F}(\mathbf{X})] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \beta & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

cuya expresión tensorial es

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_2 + \alpha \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_3 + \beta \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_1 + \alpha \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_3 + \alpha \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_1 - \beta \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_3.$$

◁

2.4. Descomposición polar del gradiente de deformaciones

El gradiente de deformaciones, al derivar de una función inyectiva, siempre es invertible y se demostrará más tarde que su determinante es positivo siempre. Tomando por el momento este resultado como válido se sigue del teorema de la descomposición polar que el tensor \mathbf{F} siempre se puede descomponer de la forma:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (2.18)$$

siendo \mathbf{R} un tensor de rotación y \mathbf{U}, \mathbf{V} dos tensores simétricos, definidos positivos. El tensor \mathbf{R} se denomina el *tensor de rotación* y los tensores \mathbf{U}, \mathbf{V} , son los *tensores de alargamiento derecho e izquierdo*, respectivamente.

La acción del tensor \mathbf{R} sobre un vector diferencial consiste en rotarlo, sin modificar su magnitud. Por contra, tanto \mathbf{U} como \mathbf{V} actúan sobre vectores diferenciales deformándolos. De la expresión (2.18) se sigue que, en general, el gradiente de deformación \mathbf{F} consta de una deformación \mathbf{U} y una rotación posterior \mathbf{R} , o equivalentemente, de una rotación \mathbf{R} y una deformación posterior \mathbf{V} .

Es ilustrativo tener en cuenta a qué espacio pertenece el resultado de operar $\mathbf{F}, \mathbf{R}, \mathbf{U}$ y \mathbf{V} sobre un vector. El gradiente de deformación es un tensor de dos puntos y según el teorema de la descomposición polar

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} = U_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j, \\ \mathbf{V} &= \sqrt{\mathbf{F} \mathbf{F}^T} = V_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Por ello, el tensor de rotación es

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^T = R_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j. \quad (2.20)$$

De este razonamiento se concluye que el tensor de rotación es un tensor de dos puntos que transforma vectores desde la configuración de referencia hasta la configuración actual, el tensor \mathbf{U} opera sobre vectores en la configuración de referencia y los transforma en otros de ese mismo espacio y el tensor \mathbf{V} opera con y hacia vectores en la configuración deformada.

Como los tensores de alargamiento son simétricos tienen siempre tres autovalores reales que se denominan los *alargamientos principales* y los denotaremos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Como además estos tensores son definidos positivos, los tres autovalores serán siempre positivos.

▷ **Ejemplo 2.4.1.** Para hallar los alargamientos principales correspondientes a la deformación (2.3.1) se calculan los autovalores λ_i^2 del tensor

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{F}^T \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

que son:

$$\lambda_1^2 = 1, \quad \lambda_2^2 = \frac{1}{2}(2 + \gamma^2 - \gamma\sqrt{4 + \gamma^2}), \quad \lambda_3^2 = \frac{1}{2}(2 + \gamma^2 + \gamma\sqrt{4 + \gamma^2}). \quad (2.22)$$

Los alargamientos principales son sencillamente las raíces cuadradas positivas de los autovalores (2.22).

◁

2.5. Medidas locales de deformación

Además del gradiente de deformación y de los tensores de alargamiento existen otras muchas medidas locales de deformación que se emplean en Mecánica de Medios Continuos. Aunque como ya se ha explicado el gradiente de deformación contiene toda la información sobre la deformación local de un cuerpo hay ocasiones en las que otras medidas proporcionan información específica más conveniente o necesaria. Ya hemos visto, por ejemplo, como los tensores de alargamiento sirven para identificar los alargamientos principales, que contienen información muy interesante, como ya se verá. Existen además tensores de deformación, como el tensor de Green-Lagrange, que se emplean comúnmente para la definición de modelos constitutivos como se explicará en el capítulo correspondiente.

El *tensor derecho de Cauchy-Green* es un tensor de segundo orden definido como

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = C_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j. \quad (2.23)$$

De su definición se sigue que es un tensor simétrico, definido positivo. Más aún, empleando la descomposición polar del gradiente de deformaciones es inmediato verificar que

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2. \quad (2.24)$$

La descomposición espectral del tensor (derecho) de Cauchy-Green se puede obtener inmediatamente a partir de la del tensor (derecho) de alargamiento \mathbf{U} . Si los alargamientos principales se denotan como $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y las direcciones principales de \mathbf{U} como $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$ entonces

$$\mathbf{C} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^2 \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a. \quad (2.25)$$

El *tensor izquierdo de Cauchy-Green* o *tensor de Finger* está definido como

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 = b_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (2.26)$$

y llamando \mathbf{n}_i a los autovectores de \mathbf{V} , se comprueba que

$$\mathbf{b} = \sum_{a=1}^{\dim} \lambda_a^2 \mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a. \quad (2.27)$$

Así pues, las parejas de tensores \mathbf{U} , \mathbf{V} y \mathbf{C} , \mathbf{b} tienen los mismos autovalores pero distintos autovectores. Más aún, se puede comprobar que

$$\mathbf{n}_a = \mathbf{R}\mathbf{N}_a, \quad a = 1, 2, 3. \quad (2.28)$$

Otros tensores de deformación que se usan en ocasiones son el **tensor de deformación de Piola** \mathbf{C}^{-1} y el tensor de deformación de Cauchy $\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{b}^{-1}$.

Los tensores de deformación estudiados hasta aquí se reducen al tensor identidad cuando la configuración deformada coincide con la de referencia. Sin embargo, en castellano es más habitual emplear el término *deformación* referido a un concepto que se anule en el caso anterior. Por ello se definen nuevas medidas, como la deformación de **Green-Lagrange**

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = E_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j, \quad (2.29)$$

cuya descomposición espectral se puede encontrar fácilmente:

$$\mathbf{E} = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{2}(\lambda_a^2 - 1) \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a. \quad (2.30)$$

Esta medida de deformación, como se puede apreciar en su expresión espectral, es un tensor que opera sobre vectores en la configuración de referencia y cuyo resultado también son vectores en este mismo espacio. Estos tensores se conocen como **tensores materiales** y anteriormente se vio que el tensor derecho de Cauchy-Green también es material.

En multitud de ocasiones cada vez que se introduce un tensor material existe un tensor relacionado que está definido desde y hacia vectores en la configuración deformada. Este segundo tipo de tensores se llaman **tensores espaciales**. Por ejemplo, asociado a \mathbf{U} , que es un tensor material, está \mathbf{V} , que es espacial; asociado a \mathbf{C} , que es material, está el tensor \mathbf{b} , que es espacial. Por último, la pareja del tensor de Green-Lagrange, una deformación material, es el **tensor de Almansi**, definido como

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) = e_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (2.31)$$

2.5.1. Deformaciones generalizadas

En general, empleando el concepto de descomposición espectral de un tensor se pueden definir infinitas medidas de deformación. Para ello basta con definir funciones escalares $f(\lambda)$ y construir el tensor de deformación correspondiente de la siguiente manera:

$$\mathbf{E}_f = \sum_{a=1}^3 f(\lambda_a) \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a. \quad (2.32)$$

Evidentemente, existen algunas restricciones para las funciones $f(\lambda)$ que son:

- a) han de estar definidas para $\lambda \in (0, \infty)$,
- b) han de ser monótonas crecientes ($f'(\lambda) > 0$),
- c) han de anularse cuando el cuerpo no está deformado, es decir, $f(1) = 0$,
y
- d) deben de cumplir que $f'(1) = 1$.

La justificación de la última condición se entiende en el contexto de las deformaciones infinitesimales, explicadas más adelante en este capítulo. El tensor de Green-Lagrange es de la forma (2.32), siendo $f(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$. Resulta útil generalizar este tipo de medidas de deformación de la siguiente manera:

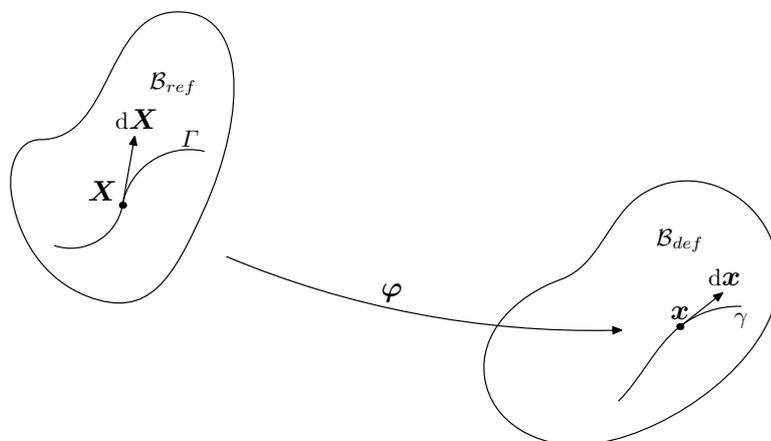
$$\mathbf{E}^{(m)} = \sum_{a=1}^3 f^{(m)}(\lambda_a) \mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a, \quad \text{con} \quad f^{(m)}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{m}(\lambda^m - 1) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \log \lambda & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Se puede verificar de forma inmediata que las funciones $f^{(m)}$ cumplen las cuatro condiciones identificadas anteriormente. La deformación $\mathbf{E}^{(o)}$ es especialmente importante y se conoce como el **tensor de deformación de Hencky**.

▷ **Ejemplo 2.5.1.** Considérese la estiramiento uniforme de una barra recta empotrada en el extremo $X = 0$ y de longitud L en su configuración de referencia. La barra se estira debido a la aplicación de una fuerza en su extremo libre de forma que su longitud deformada sea ℓ con lo que el campo de deformación para este problema unidimensional es $\varphi(X) = X\ell/L$. El resto de medidas de deformación tiene la siguiente expresión analítica:

- a) El gradiente de deformación es $\mathbf{F} = \ell/L = \lambda$.
- b) Los tensores de alargamiento derecho e izquierdo son $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{F}$.
- c) Los tensores derecho e izquierdo de Cauchy-Green son $\mathbf{C} = \ell^2/L^2 = \lambda^2 = \mathbf{b}$.
- d) El tensor de Green-Lagrange toma el valor $\mathbf{E} = \frac{\ell^2 - L^2}{2L^2} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$.
- e) El tensor de Almansi es $\mathbf{e} = \frac{\ell^2 - L^2}{2\ell^2} = \frac{1}{2}(1 - \lambda^{-2})$.
- f) El tensor de Hencky se simplifica a $\mathbf{E}^{(o)} = \log \frac{\ell}{L}$.

◁


 Figura 2.4: Transformación de una curva material Γ .

2.6. Transformación de longitud, superficie y volumen

La cinemática de medios continuos intenta describir la deformación global y local de los cuerpos. En particular, resulta muy interesante poder calcular, a partir del campo de deformaciones, cómo se transforman los arcos, las superficies y los volúmenes. La forma de abordar esta cuestión es estudiando estas transformaciones a nivel diferencial e integrando los resultados así obtenidos. Como veremos en esta sección toda esta información se puede obtener a partir del gradiente de deformación.

2.6.1. Transformación de longitud y ángulo

Ya se explicó en la sección 2.2 que el gradiente de deformación \mathbf{F} transforma los vectores diferenciales desde la configuración de referencia a la deformada. Suponemos ahora que un vector diferencial $d\mathbf{X}$ en la configuración de referencia tiene dirección $\boldsymbol{\eta}$ y longitud dS , es decir, $d\mathbf{X} = \boldsymbol{\eta} dS$. Debido a la deformación del medio continuo, este vector se transforma en $d\mathbf{x}$ que tiene dirección $\boldsymbol{\eta}$ y longitud ds (ver la figura 2.3). La definición matemática de estas dos longitudes (que son magnitudes escalares) es:

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}, \quad ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}. \quad (2.34)$$

A partir de la expresión (2.15) que relaciona los vectores diferenciales sin deformar y deformado obtenemos:

$$ds^2 = (\mathbf{F}d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}) = (\boldsymbol{\eta} dS) \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} (\boldsymbol{\eta} dS) = dS^2 \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\eta}. \quad (2.35)$$

Concluimos pues, que dado un vector diferencial $d\mathbf{X} = \boldsymbol{\eta} dS$, con $|\boldsymbol{\eta}| = 1$ y origen en el punto \mathbf{X} de la configuración de referencia, éste se transforma

en otro vector diferencial $d\mathbf{x}$, con origen en $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$ y longitud ds , dada por la expresión (2.35). El alargamiento por unidad de longitud de la curva Γ en el punto \mathbf{X} verifica pues:

$$\lambda = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\frac{ds^2}{dS^2}} = \sqrt{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\boldsymbol{\eta}}. \quad (2.36)$$

Consideremos ahora el caso más complejo de una curva material Γ definida en la configuración de referencia. Esta curva está “pegada” a las partículas materiales que se encuentran “bajo” ella. Cuando estas partículas se deforman debido a la deformación $\boldsymbol{\varphi}$, la curva también se deforma y ocupa una posición $\gamma = \boldsymbol{\varphi}(\Gamma)$ de la configuración deformada. La longitud de la curva en la configuración de referencia es simplemente

$$L = \int_{\Gamma} dS, \quad (2.37)$$

y la longitud de la curva deformada es

$$\ell = \int_{\gamma} ds = \int_{\Gamma} \lambda dS = \int_{\Gamma} \sqrt{\boldsymbol{\tau}(\Gamma(S)) \cdot \mathbf{C}(\Gamma(S))\boldsymbol{\tau}(\Gamma(S))} dS, \quad (2.38)$$

siendo $\boldsymbol{\tau}(\Gamma(S))$ el vector tangente *unitario* a la curva Γ en el punto $\Gamma(S)$.

Se puede considerar ahora el cambio del ángulo que forman entre sí dos vectores diferenciales $d\mathbf{X}_1 = \boldsymbol{\eta}_1 dS_1$ y $d\mathbf{X}_2 = \boldsymbol{\eta}_2 dS_2$ con origen en el punto $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_o$ al deformarse el cuerpo. El ángulo Θ que estos dos vectores forman en la configuración de referencia se puede calcular empleando las propiedades del producto escalar:

$$\cos \Theta = \frac{d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2}{|d\mathbf{X}_1| |d\mathbf{X}_2|} = \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_2. \quad (2.39)$$

De la misma manera, después de deformarse, los correspondientes vectores diferenciales forman un ángulo θ en la configuración deformada cuya magnitud viene dada por

$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2}{|d\mathbf{x}_1| |d\mathbf{x}_2|}, \quad (2.40)$$

que se puede expresar como:

$$\cos \theta = \frac{\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\boldsymbol{\eta}_2}{\sqrt{\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\boldsymbol{\eta}_1} \sqrt{\boldsymbol{\eta}_2 \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X})\boldsymbol{\eta}_2}} \quad (2.41)$$

El resultado más importante de esta sección es que el tensor derecho de Cauchy-Green contiene toda la información del cambio local de longitud y ángulo en un cuerpo deformable. Aunque no lo vamos a demostrar, también el tensor de Finger contiene la misma información.

2.6.2. Transformación de área

De la misma manera que las curvas materiales se deforman cuando el medio sobre el que están definidas se deforma, las superficies también. Para evaluar cuantitativamente el efecto de esta deformación se considera un diferencial de superficie sobre la configuración de referencia. Este diferencial es una cantidad vectorial cuya magnitud dA es el área de un paralelogramo de lados $d\mathbf{X}_1$ y $d\mathbf{X}_2$ y cuya dirección \mathbf{N} viene dada por $d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2$. Es decir,

$$\mathbf{N} dA = d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2 . \quad (2.42)$$

Para calcular la superficie y dirección del elemento de área deformado basta con emplear las definiciones $d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_1, d\mathbf{x}_2 = \mathbf{F}d\mathbf{X}_2$ así como la propiedad elemental $(\mathbf{T}\mathbf{a}) \times (\mathbf{T}\mathbf{b}) = \det(\mathbf{T})\mathbf{T}^{-T}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. De estas expresiones se obtiene que el diferencial de superficie deformada $\mathbf{n}da$ se puede calcular como

$$\mathbf{n} da = d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2 = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}(d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA . \quad (2.43)$$

Nótese que el tensor $\det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}$ es el adjunto del gradiente de deformación así que la relación de áreas también se puede escribir como

$$\mathbf{n} da = \text{adj}(\mathbf{F})\mathbf{N} dA . \quad (2.44)$$

Esta expresión se conoce como la *fórmula de Nanson*.

2.6.3. Transformación de volumen

Finalmente, y siguiendo el mismo proceso que en los dos casos anteriores, también podemos calcular el efecto de la deformación sobre el volumen de un cuerpo continuo. Sea un diferencial de volumen material dV en la configuración de referencia. Este volumen se puede considerar como el que contiene un paralelepípedo diferencial cuyos lados son los vectores diferenciales $d\mathbf{X}_1, d\mathbf{X}_2$ y $d\mathbf{X}_3$ situados sobre el punto $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_{ref}$. A partir de las propiedades del triple producto el volumen diferencial se puede calcular como

$$dV = [d\mathbf{X}_1 \ d\mathbf{X}_2 \ d\mathbf{X}_3] . \quad (2.45)$$

Empleando la definición intrínseca del determinante (ver Eq. (1.56)), el diferencial de volumen deformado dv se puede relacionar con el volumen de referencia con la expresión

$$dv = [\mathbf{F}d\mathbf{X}_1 \ \mathbf{F}d\mathbf{X}_2 \ \mathbf{F}d\mathbf{X}_3] = \det(\mathbf{F})[d\mathbf{X}_1 \ d\mathbf{X}_2 \ d\mathbf{X}_3] = \det(\mathbf{F})dV . \quad (2.46)$$

El determinante del gradiente de deformaciones se suele indicar con la letra J , así pues

$$J = \det(\mathbf{F}) = \sqrt{\det(\mathbf{C})} = I_3(\mathbf{F}) . \quad (2.47)$$

El jacobiano J proporciona, como se ha visto, el cociente entre el volumen deformado y el volumen sin deformar de un paralelepípedo elemental. Como la materia no puede desaparecer, este cociente podrá ser mayor o menor que uno, pero siempre habrá de ser positivo.

Sea Ω_o una región material del cuerpo. Si su volumen es $V = \int_{\Omega_o} dV$ se obtiene que el volumen de esta región una vez deformada es

$$v = \text{volumen}(\varphi(\Omega_o)) = \int_{\varphi(\Omega_o)} dv = \int_{\Omega_o} J(\mathbf{X}) dV \quad (2.48)$$

2.7. Deformaciones de sólido rígido

En general, las deformaciones de los cuerpos son muy complejas y raramente se conoce una expresión analítica para φ . Sin embargo, existen algunos tipos de deformaciones tan sencillas que permiten encontrar una expresión de todas sus medidas cinemáticas. El primer tipo lo constituyen las **deformaciones de sólido rígido**. Estos movimientos son aquellos en los que el cuerpo cambia de posición sin que varíe la distancia relativa entre puntos del mismo. Es decir, para cualquier pareja de puntos \mathbf{X}, \mathbf{Y} del cuerpo \mathcal{B}_{ref} se cumple que

$$|\mathbf{Y} - \mathbf{X}| = |\varphi(\mathbf{Y}) - \varphi(\mathbf{X})| . \quad (2.49)$$

Las deformaciones de sólido rígido son siempre de la forma:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{a} + \mathbf{Q}(\mathbf{X} - \mathbf{Z}) , \quad (2.50)$$

donde \mathbf{a} es el vector de posición de un punto cualquiera y \mathbf{Q} es un tensor de rotación de componentes

$$\mathbf{Q} = Q_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j \quad (2.51)$$

Es sencillo comprobar que los movimiento de tipo (2.50) preservan las distancias relativas. La demostración de que éstas son las únicas deformaciones con esta propiedad es un poco más compleja: derivando (2.49) respecto a \mathbf{X} primero y respecto a \mathbf{Y} después se obtiene:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X})^T \mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \mathbf{I} . \quad (2.52)$$

Eligiendo $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ en esta ecuación deducimos que el gradiente de deformación ha de ser ortogonal y puesto que $\det(\mathbf{F}) > 0$, además propio, es decir una rotación. Volviendo a la ecuación (2.52) se deduce que $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{Y})$, es decir que el campo de rotaciones es constante $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}$. Una deformación con gradiente de deformación constante e igual a \mathbf{Q} ha de ser de la forma (2.50).

Las deformaciones de sólido rígido tienen gradiente de deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}$ por lo que el tensor derecho de Cauchy-Green es

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} . \quad (2.53)$$

Se deduce pues que, como era de esperar, una deformación de sólido rígida preserva las longitudes, áreas y volúmenes diferenciales. También se puede demostrar que una deformación con $\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \mathbf{I}$ ha de ser de la forma (2.50).

Dentro de las deformaciones de sólido rígido existen dos tipos elementales: las *traslaciones rígidas*

$$\varphi_{tr}(\mathbf{X}) = \mathbf{a} + X_i \mathbf{e}_i , \quad (2.54)$$

y las *rotaciones puras*

$$\varphi_{rot}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}\mathbf{X} , \quad (2.55)$$

y es fácil demostrar que todo movimiento rígido es la composición de una traslación y una rotación, o viceversa.

2.8. Deformaciones homogéneas

El segundo tipo de deformaciones que estudiamos son las llamadas *deformaciones homogéneas*, definidas como aquellas en las que el gradiente de deformación \mathbf{F} es el mismo en todos los puntos del cuerpo, es decir,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F} . \quad (2.56)$$

La forma más general de una deformación homogénea es pues

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{a} + \mathbf{F}\mathbf{X} , \quad (2.57)$$

siendo \mathbf{a} un vector cualquiera.

Este tipo de deformación es sencillo pues todas las medidas de deformación (que siempre se derivan del gradiente de deformación) son iguales para todos los puntos del cuerpo. Esto además implica que las relaciones derivadas para la transformación de vectores infinitesimales, áreas y volúmenes son en este caso válidas para vectores, áreas y volúmenes de tamaño finito.

Un caso particular sencillo pero importante de deformación homogénea es el *alargamiento*. Se dice que una deformación es un alargamiento o estiramiento si es de la forma:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{Y} + \mathbf{U}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) , \quad (2.58)$$

siendo \mathbf{Y} un punto fijo y \mathbf{U} un tensor simétrico y definido positivo. Se puede comprobar inmediatamente que un alargamiento es una deformación

homogénea con gradiente de deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}$. Empleando el teorema de la descomposición polar al gradiente de deformación concluimos que ésta no incluye ninguna rotación. Nótese que una deformación de alargamiento puede “acortar” las dimensiones del cuerpo continuo.

El siguiente teorema caracteriza todas las deformaciones homogéneas como composición de otras más sencillas:

Teorema 2.8.1. *Toda deformación homogénea φ se puede escribir como la composición de una traslación, una rotación pura y un alargamiento:*

$$\varphi(\mathbf{X}) = (\varphi_{tr} \circ \varphi_{rot} \circ \varphi_{est})(\mathbf{X}) . \quad (2.59)$$

Demostración. Para demostrar este teorema basta definir las tres deformaciones como:

$$\begin{aligned} \varphi_{tr}(\mathbf{X}) &= \varphi(\mathbf{Y}) + \mathbf{X} - \mathbf{Y} , \\ \varphi_{rot}(\mathbf{X}) &= \mathbf{Y} + \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) , \\ \varphi_{est}(\mathbf{X}) &= \mathbf{Y} + \mathbf{U}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) . \end{aligned} \quad (2.60)$$

□

2.9. Deformaciones infinitesimales

Quizás las deformaciones “sencillas” más importantes que existen son las llamadas deformaciones infinitesimales y que estudiamos en esta sección. Este tipo de deformaciones forman la base de la teoría clásica de Elasticidad y, en general, de otras teorías válidas para cuerpos que se deforman poco. En realidad, las deformaciones infinitesimales son sólo una aproximación a lo que hemos definido como deformación, pero son extremadamente útiles pues permiten resolver *aproximadamente* un gran número de problemas prácticos. Dicho esto, el marco geométrico que hemos presentado en las secciones anteriores no encaja, como veremos, exactamente en esta cinemática.

Para medir el tamaño de una deformación definimos el parámetro adimensional

$$\delta = \sup_{\mathbf{X}} \|\mathbf{C}(\mathbf{X}) - \mathbf{I}\| . \quad (2.61)$$

Usando este parámetro podemos definir el concepto de **deformación infinitesimal** como aquella en la que el parámetro δ es muy pequeño, es decir, que en todos los puntos del cuerpo el tensor derecho de Cauchy-Green es muy parecido al tensor identidad. Escribimos esta condición como:

$$\delta \ll 1 . \quad (2.62)$$

La propiedad (2.62) que la caracteriza estas deformaciones tiene implicaciones de muy largo alcance, la mayoría de las cuales simplifica enormemente el tratamiento matemático de la cinemática. La primera simplicación

del cálculo tensorial es que no resulta necesario distinguir entre derivadas con respecto a coordenadas materiales y espaciales. Así por ejemplo

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} \mathbf{F}^{-1} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} (\mathbf{I} + \mathbf{H})^{-1} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} + \mathcal{O}(\delta) . \quad (2.63)$$

Por ello, cuando se estudien deformaciones infinitesimales, no se utilizará la notación $\nabla_{\mathbf{X}}$ o $\nabla_{\mathbf{x}}$ sino únicamente ∇ . De la misma manera, en vez de $\nabla_{\mathbf{X}} \cdot$ o $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot$ emplearemos $\nabla \cdot$, y en vez de $\nabla_{\mathbf{X}} \times$ y $\nabla_{\mathbf{x}} \times$, simplemente $\nabla \times$. Esto quiere decir que, para este tipo de problemas, las dos configuraciones estudiadas \mathcal{B}_{ref} y \mathcal{B}_{def} dejan de distinguirse y nos referimos al cuerpo simplemente como \mathcal{B} . El objeto fundamental del análisis deja de ser la deformación para ser el *campo de desplazamiento* definido como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} . \quad (2.64)$$

y entendido como una función $\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

A partir del desplazamiento se definen el *tensor de deformación infinitesimal* $\boldsymbol{\varepsilon}$ y el de *rotación infinitesimal* $\hat{\mathbf{w}}$, cuyas expresiones son

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}) , \quad \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \nabla^a \mathbf{u}(\mathbf{x}) . \quad (2.65)$$

Nótese que el segundo tensor es antisimétrico y por tanto tiene un vector axial \mathbf{w} . En componentes, estos dos tensores tienen por expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j , \quad (2.66)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j . \quad (2.67)$$

Existen varias maneras para explicar por qué el tensor de deformaciones infinitesimales tiene la forma que se ha indicado. La más ilustrativa, basado en toda la teoría que hemos desarrollado en este capítulo, consiste en demostrar que $\boldsymbol{\varepsilon}$ es una aproximación de orden δ^2 del tensor de Green-Lagrange. Así pues, cuanto menor sea el parámetro de tamaño δ , más se parecerán estas dos medidas de deformación. En realidad, dicha justificación se podría generalizar a cualquier medida de deformación del tipo (2.32). Para comprobar esta afirmación definimos

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) , \quad (2.68)$$

un tensor cuya norma es del orden de δ . Así pues,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.69)$$

$$= \frac{1}{2}((\mathbf{I} + \mathbf{H})^T (\mathbf{I} + \mathbf{H}) - \mathbf{I}) \quad (2.70)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad (2.71)$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \quad (2.72)$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon} + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (2.73)$$

La teoría de deformaciones infinitesimales, o pequeñas deformaciones, parte de la hipótesis de que los errores que se cometen al reemplazar \mathbf{E} con $\boldsymbol{\varepsilon}$ se pueden ignorar y por tanto ésta última es la única medida de deformación.

Una propiedad fundamental de las deformaciones infinitesimales es que la medida de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ es una función *lineal* de \mathbf{u} , al contrario que \mathbf{E} y otras medidas de deformación discutidas en la sección 2.6 que dependen no linealmente de la deformación. Esta es una característica que modifica de manera radical la forma de enfocar la teoría de medios deformables y eventualmente posibilitará que las ecuaciones del problema elástico con deformaciones infinitesimales definan un problema lineal. Esto a su vez posibilitará el principio de superposición que puede ser empleado para resolver problemas de forma sistemática y simplificada.

2.9.1. Deformaciones infinitesimales rígidas

El tensor de deformación infinitesimal mide el grado de deformación local en una deformación infinitesimal. Por ello se dice que una deformación es infinitesimalmente rígida si dicho tensor de deformación se anula, es decir

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathcal{B}. \quad (2.74)$$

En las deformaciones infinitesimales rígidas el gradiente de desplazamiento \mathbf{H} ha de ser antisimétrico y coincide con el tensor de rotación infinitesimal $\hat{\boldsymbol{w}}$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^s + \mathbf{H}^a = \boldsymbol{\varepsilon} + \hat{\boldsymbol{w}} = \hat{\boldsymbol{w}}. \quad (2.75)$$

Este tipo de deformaciones se corresponde a un campo de desplazamientos que sólo puede ser de la forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{y}) + \hat{\boldsymbol{w}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.76)$$

siendo \mathbf{y} cualquier punto del cuerpo. Recalcamos que una deformación infinitesimalmente rígida no es una deformación rígida, tal y como éstas se definieron en la sección 2.7.

2.10. Movimientos

Hasta ahora nos hemos centrado en el estudio de la cinemática de cuerpos deformables centrándonos en las deformaciones que ocurren entre una configuración de referencia y una configuración deformada. En ésta y las próximas secciones se estudian familias de configuraciones deformadas y los objetos cinemáticos que se pueden definir para su estudio.

En primer lugar se define un *movimiento* como una familia de configuraciones φ_t que depende de un parámetro t (el tiempo) de forma diferenciable. Es decir, si $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ es el espacio de configuraciones posibles de un cuerpo continuo \mathcal{B}_{ref} , entonces φ_t es una curva en $\mathcal{S}(\mathcal{B})$. Se define la *configuración inicial* como aquella que tiene lugar en el instante $t = 0$, es decir, χ_0 . El término *configuración actual* se emplea para referirse a χ_t .

Cuando un cuerpo realiza un movimiento, cada partícula $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_{ref}$ recorre una curva en el espacio $\mathbf{c}(t)$ que se puede expresar en función del campo de configuraciones como:

$$\mathbf{c}(t) = \varphi_t(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}, t) . \quad (2.77)$$

Esta curva se denomina *trayectoria* y determina de forma inequívoca la posición de la partícula \mathbf{X} en cada instante de tiempo.

2.11. Descripción material y espacial

El movimiento de un cuerpo continuo se define completamente mediante la familia de configuraciones φ_t . En un instante de tiempo genérico t además estas configuraciones definen una aplicación biyectiva entre \mathcal{B}_{ref} y \mathcal{B}_t . Esto significa que cada partícula material $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_{ref}$ ocupa, en dicho instante, un punto del espacio $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ y que además cada punto de la región $\mathcal{B}_t \in \mathbb{R}^3$ es la imagen de una y solamente una partícula material del cuerpo. Dado una posición $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ podemos encontrar cuál es la partícula que ocupa ese lugar en el instante t mediante la función inversa y obtenemos $\mathbf{X} = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x})$.

Considérese ahora un campo escalar, vectorial o tensorial \mathbf{Y} que está definida en todo instante sobre las partículas materiales de la configuración de referencia. La expresión completa de esta función, incluyendo sus argumentos, es $\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t)$ y devuelve, para cada instante de tiempo t el valor del campo \mathbf{Y} que corresponde a la partícula \mathbf{X} . Se dice que \mathbf{Y} es un *campo material*.

Empleando la relación biyectiva que la deformación establece podemos expresar el campo \mathbf{Y} en función de la posición \mathbf{x} en lugar de la partícula \mathbf{X} . Para ello sustituimos \mathbf{X} por $\varphi_t^{-1}(\mathbf{x})$ y definimos

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{Y}(\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}), t) . \quad (2.78)$$

El campo $\mathbf{y} = \mathbf{Y} \circ \varphi_t^{-1}$ depende de la posición y del tiempo y se denomina *campo espacial*. Los dos campos \mathbf{Y} y \mathbf{y} dan el mismo resultado si se

evalúan en el mismo instante de tiempo y si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{X})$. Además, conocido uno de ellos y la función $\boldsymbol{\varphi}_t$ se puede calcular el otro.

En Mecánica de Medios Continuos se usan campos materiales y espaciales, según la conveniencia de cada situación. En la mayoría de las situaciones se emplean letras mayúsculas para indicar los campos materiales y letras minúsculas para los espaciales. Como en el ejemplo anterior, la versión material y espacial de un mismo campo se indican con la misma letra pero en mayúscula y minúscula, respectivamente.

2.12. Velocidad y aceleración

Las definiciones de velocidad y de aceleración en Mecánica de Medios Continuos coinciden con las definiciones clásicas estudiadas en Mecánica Clásica. Sin embargo merecen un estudio cuidadoso para diferenciar las distintas formas de calcularlas.

Como en la sección 2.10, se considera la trayectoria $\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t)$ de una partícula material \boldsymbol{X} y se definen su velocidad y aceleración como la primera y segunda derivadas temporales de esta función. Más específicamente, se define la **velocidad material** \boldsymbol{V} y la **aceleración material** \boldsymbol{A} de un partícula $\boldsymbol{X} \in \mathcal{B}_{ref}$ como:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}, t) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{X}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t}, \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}, t) = \ddot{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{X}, t) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.79)$$

Nótese que la notación $\dot{(\)}$ se utiliza para indicar la derivada parcial con respecto a la variable t .

Por su definición resulta obvio que se trata de dos campos vectoriales materiales. Físicamente representan la velocidad y aceleración, en el sentido clásico, de la partícula identificada con la posición \boldsymbol{X} en la configuración de referencia. Para muchas aplicaciones resulta útil definir la versión espacial de estos dos campos y por ello se definen la **velocidad espacial** \boldsymbol{v} y la **aceleración espacial** \boldsymbol{a} como los campos vectoriales espaciales

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\varphi}_t^{-1}(\boldsymbol{x}), t), \quad \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\varphi}_t^{-1}(\boldsymbol{x}), t). \quad (2.80)$$

Físicamente, representan la velocidad y la aceleración, en sentido clásico, de la partícula que se encuentre en el instante t ocupando la posición \boldsymbol{x} .

Es importante notar que ni la velocidad espacial ni la aceleración espacial *son la derivada temporal de ninguna función*. Para encontrar la relación de estas tasas con las derivadas empleadas para definir la velocidad y la aceleración materiales se utiliza el concepto de **derivada temporal material**. Esta es la derivada respecto del tiempo de un campo cualquier, cuando se fija la partícula \boldsymbol{X} . Así, la derivada temporal material de \boldsymbol{y} , un campo

escalar, vectorial o tensorial *espacial* se denota $\frac{D\mathbf{y}}{Dt}$ y se calcula como

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{y}}{Dt}(\mathbf{x}, t) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \\ &= \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}=\varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)} \mathbf{y}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \right) \circ \varphi_t^{-1} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) . \end{aligned} \quad (2.81)$$

De forma más compacta se define para cualquier campo espacial ψ

$$\frac{D\psi}{Dt} \circ \varphi_t = \frac{d}{dt} (\psi \circ \varphi_t) . \quad (2.82)$$

Con la notación introducida podemos afirmar que la aceleración espacial \mathbf{a} no es igual a $\dot{\mathbf{v}}$ sino que se puede calcular como

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) . \quad (2.83)$$

Para comprobar esta afirmación, comenzamos por calcular la aceleración material de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) . \end{aligned} \quad (2.84)$$

Componiendo ambos lados de esta identidad con φ_t^{-1} se obtiene

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{A} \circ \varphi_t^{-1})(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) . \quad (2.85)$$

2.13. Tasas tensoriales

Otros tensores derivados de las tasas de deformación resultarán útiles para el estudio posterior de los medios deformables. En primer lugar, observamos que la derivada temporal (material) del gradiente de deformación se puede calcular como

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\mathbf{X}} \varphi_t(\mathbf{X})) = \nabla_{\mathbf{X}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(\mathbf{X}) \right) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) . \quad (2.86)$$

Pero además, este último tensor se puede reescribir de una forma más útil

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}} (\mathbf{v} \circ \varphi_t)(\mathbf{X}, t) = (\mathbf{l} \circ \varphi_t)(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) , \quad (2.87)$$

siendo

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.88)$$

el tensor espacial conocido como el *gradiente de velocidad*. Este campo tensorial se puede descomponer, como siempre, en una parte simétrica y otra antisimétrica

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{l}^s(\mathbf{x}, t) , \quad \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{l}^a(\mathbf{x}, t) \quad (2.89)$$

que se llaman, respectivamente, la *tasa de deformación* y el *tensor de rotación propia* o *tensor de spin*. Su vector axial, que indicamos como $\boldsymbol{\omega}$, es el *campo de vorticidad*.

2.A. El determinante del gradiente de deformación

Como se explicó en la sección 1.4.1 el determinante de un tensor de segundo orden es una operación algebraica definida con una interpretación geométrica que la hace independiente del sistema de coordenadas. El gradiente de deformaciones es un tensor definido de manera general como

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j , \quad (2.90)$$

siendo φ_i la componente i -ésima de la deformación expresado en el sistema de coordenadas del espacio, X_j la coordenada j -ésima en el sistema del cuerpo y $\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_j$ los vectores de las bases en las coordenadas del espacio y el cuerpo, respectivamente.

Supongamos ahora que escogemos sistemas de coordenadas cartesianos en el cuerpo y en el espacio que los indicamos como $\{Z_a\}_{a=1}^3$ y $\{z_a\}_{a=1}^3$, respectivamente. Además, las bases cartesianas del cuerpo y del espacio son $\{\mathbf{I}_a\}_{a=1}^3$ y $\{\mathbf{i}_a\}_{a=1}^3$. Ahora escogemos otros sistema de coordenadas para el cuerpo y el espacio, ninguno de ellos necesariamente cartesiano y además posiblemente distintos. Las coordenadas y la base en el cuerpo las llamamos $\{\Theta_i\}_{i=1}^3$ y \mathbf{E}_i ; a su vez, las del espacio las indicamos como $\{\beta_i\}_{i=1}^3$ y \mathbf{h}_i . Escribimos, por tanto,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial Z_b} \mathbf{i}_a \otimes \mathbf{I}_b = \frac{\partial \tilde{\varphi}_a}{\partial \Theta_b} \mathbf{h}_a \otimes \mathbf{E}_b . \quad (2.91)$$

Los sistemas de coordenadas del cuerpo y los del espacio deben de estar relacionados. Así pues, al menos localmente,

$$Z_a = \hat{Z}_a(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) , z_a = \hat{z}_a(\beta_1, \beta_2, \beta_3) . \quad (2.92)$$

A su vez, las relaciones inversas han de existir también y por tanto

$$\Theta_i = \hat{\Theta}_i(Z_1, Z_2, Z_3) , \beta_i = \hat{\beta}_i(z_1, z_2, z_3) . \quad (2.93)$$

En función de estos cambios de coordenadas

$$\tilde{\varphi}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) = \varphi(\hat{Z}_1(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3), \hat{Z}_2(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3), \hat{Z}_3(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)). \quad (2.94)$$

El determinante del gradiente de deformaciones es el determinante de la matriz con componentes $\partial\varphi_a/\partial Z_j$. Pero se verifica que

$$\frac{\partial\varphi_a}{\partial Z_j} = \frac{\partial\hat{z}_a}{\partial\beta_i} \frac{\partial\tilde{\varphi}_i}{\partial\Theta_a} \frac{\partial\hat{\Theta}_a}{\partial Z_j}. \quad (2.95)$$

Como la matriz de componentes $\partial\varphi_a/\partial Z_j$ es el producto de otras tres, el determinante de \mathbf{F} será el producto de los determinantes de las tres matrices

$$[J_\beta]_{ai} = \frac{\partial\hat{z}_a}{\partial\beta_i}, \quad \left[\frac{\partial\tilde{\varphi}_i}{\partial\Theta_a}\right], \quad [J_\Theta]_{aj}^{-1} = \frac{\partial\hat{\Theta}_a}{\partial Z_j}. \quad (2.96)$$

La matriz J_β es la matriz del cambio de base a las coordenadas espaciales β desde la cartesianas. La matriz de componentes $[\frac{\partial\tilde{\varphi}_i}{\partial\Theta_a}]$ es la correspondiente al gradiente de deformaciones en cualquier sistema de coordenadas. Por último, la matriz de componentes $[J_\Theta]_{aj}$ es la correspondiente al cambio de coordenadas Θ en el cuerpo. Así pues, concluimos que

$$\det \mathbf{F} = \frac{\left|\frac{\partial\hat{z}_a}{\partial\beta_i}\right|}{\left|\frac{\partial Z_j}{\partial\Theta_a}\right|} \left|\frac{\partial\tilde{\varphi}_i}{\partial\Theta_a}\right|. \quad (2.97)$$

En el caso de coordenadas cilíndricas, $J_{r\theta z} = r$; para coordenadas esféricas, $J_{r\theta\phi} = r^2 \sin \phi$.

La razón última por la que el determinante del gradiente de funciones no es simplemente el determinante de su matriz de componentes, cualquiera que sea su sistema de coordenadas, es que al cambiar las coordenadas no sólo estamos cambiando la base en la que se expresa el tensor, sino que también se modifica el significado de cada componente.

Resumen de fórmulas importantes

Gradiente de deformación	$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \varphi$
Descomposición polar	$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$
Deformación de Cauchy-Green (derecho)	$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$
Deformación de Finger (izquierdo)	$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$
Deformación de Green-Lagrange	$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$
Transformación de longitud	$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$
Transformación de área	$\mathbf{n} da = \text{adj}(\mathbf{F})\mathbf{N} dA$
Transformación de volumen	$dv = J dV$
Derivada material	$\frac{D\psi}{Dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}}\psi \cdot \mathbf{v}$
Velocidad material	$\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t$
Aceleración material	$\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}$
Velocidad espacial	$\mathbf{v} = \mathbf{V} \circ \varphi_t^{-1}$
Aceleración espacial	$\mathbf{a} = \mathbf{A} \circ \varphi_t^{-1} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$
Tasa de deformación	$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}}^T \mathbf{v})$

Problemas

Problema 2.1. Sean \mathbf{V} y \mathbf{v} un campo vectorial en la configuración de referencia y otro en la configuración deformada, respectivamente, que satisfacen $\mathbf{V} = \mathbf{v} \circ \varphi$. Demostrar la relación

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{V} = \text{tr}[\mathbf{F} (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \circ \varphi)] .$$

Problema 2.2. En un cierto instante, la deformación de un medio continuo viene definida por:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(\mathbf{X}) = X_1 - \alpha X_3 , \\ x_2 &= \varphi_2(\mathbf{X}) = X_2 - \alpha X_3 , \\ x_3 &= \varphi_3(\mathbf{X}) = -\alpha X_1 + \alpha X_2 + X_3 , \end{aligned}$$

siendo X_1, X_2, X_3 un sistema de coordenadas cartesianas en el cuerpo, x_1, x_2, x_3 otro en el espacio y α una constante. Se pide:

- Obtener el tensor gradiente de deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ y justificar que se trata de una deformación homogénea.
- Calcular el vector deformado de \mathbf{E}_1 , siendo $\{\mathbf{E}_i\}$ la base cartesiana del cuerpo.
- Hallar el tensor derecho de Cauchy-Green $\mathbf{C}(\mathbf{X})$.
- Calcular los alargamientos de los vectores $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ y \mathbf{E}_3 .
- Obtener el tensor de Green-Lagrange $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ para la deformación φ .

Problema 2.3. Un medio continuo experimenta una deformación definida por la función $\varphi : \mathcal{B}_{ref} \rightarrow \mathbf{R}^3$ cuyas componentes en una base cartesiana del espacio son

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{X}) &= X_1^2 + X_2 , \\ \varphi_2(\mathbf{X}) &= \sin X_2 , \\ \varphi_3(\mathbf{X}) &= X_3 , \end{aligned}$$

en función de las coordenadas cartesianas $X_i, i = 1, 2, 3$ del cuerpo. Se pide:

- Calcular la expresión del gradiente de deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ y del tensor de Cauchy-Green $\mathbf{C}(\mathbf{X})$.
- Calcular los alargamientos principales en el punto $\mathbf{Z} = (1, 0, 3)$, así como las direcciones principales.
- Un vector diferencial $d\mathbf{X}$ tiene su origen en \mathbf{Z} y dirección $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. ¿Cuál es su alargamiento por unidad de longitud al deformarse?

- d) De todos los vectores diferenciales con origen en el punto \mathbf{Z} , ¿Cuál de ellos experimenta un mayor alargamiento unitario? ¿Cuánto vale dicho alargamiento?
- e) ¿Cuál es el incremento de volumen que sufre al deformarse un paralelepípedo infinitesimal situado en el punto \mathbf{Z} ?

Problema 2.4. Una barra deformable, recta y de sección uniforme se encuentra sujeta en un extremo. Para estudiar la deformación de la barra se supone que el extremo fijo coincide con el origen de un sistema de coordenadas cartesianas y que la barra se encuentra situada en la dirección del eje de coordenadas definido por el primer vector de la base coordenada, \mathbf{e}_1 . La longitud la barra en el instante inicial se supone conocida y de valor L_0 . Al aplicar una fuerza en la dirección de \mathbf{e}_1 sobre el extremo libre de la barra ésta se deforma, permaneciendo sobre el eje coordenado, y su longitud en un instante cualquiera $t > 0$ se denomina L_t . Si denominamos $X \in [0, L_0]$ a los partículas de la barra en la configuración de referencia, la deformación se puede escribir como:

$$x = \varphi(X, t) = X \cdot (1 + ct),$$

siendo c una constante. De esta manera, la longitud L_t de la barra en el instante t se puede hallar como $\varphi(L_0, t) = L_0(1 + ct)$, puesto que coincide con la posición de la partícula $X = L_0$ en el instante t . Para $c = 1$, se pide:

- a) Calcular el gradiente de deformaciones \mathbf{F} expresado como una función del tiempo y también expresado como una función de la longitud actual L_t (y otras cantidades conocidas).
- b) Razonar si la deformación de la barra es homogénea.
- c) Calcular el tensor de Cauchy-Green \mathbf{C} , igual que antes expresado como una función del tiempo y también expresado como una función de la longitud actual L_t .
- d) Calcular el tensor de Green-Lagrange, también expresado como una función del tiempo y como una función de la longitud actual L_t .
- e) Dibujar un gráfico de F_{11} , C_{11} y E_{11} en función de L_t/L_0 .

Problema 2.5. Un cubo de lado L tiene, en la configuración de referencia, sus ejes paralelos a un sistema de coordenadas cartesianas (X_1, X_2, X_3) y su centro en el centro del sistema. Sobre la cara $X_3 = L/2$ tiene dibujado un círculo de radio $R = L/2$. El cubo sufre una deformación que transforma puntos \mathbf{X} en la configuración de referencia en puntos \mathbf{x} en espacio físico

definido cuyas coordenadas cartesianas son

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1 + \alpha X_2, \\x_2 &= \beta X_2, \\x_3 &= X_3.\end{aligned}$$

Determinar

- La expresión del gradiente de deformación y el tensor derecho de Cauchy-Green en cualquier punto del cubo,
- La integral que sirve para calcular la longitud del borde del círculo en la configuración deformada,
- El área del círculo en la configuración deformada.

Problema 2.6. Considerar un cuerpo sometido a una deformación φ cuya expresión analítica en coordenadas cartesianas del cuerpo (X_1, X_2, X_3) y del espacio (x_1, x_2, x_3) es

$$(x_1, x_2, x_3) = \varphi(X_1, X_2, X_3) = (X_2 e^{t/T}, -X_1(1 + t/T), X_3),$$

donde T es una constante con dimensiones de tiempo.

Para esta deformación,

- Calcular el gradiente de deformación \mathbf{F} . Explicar si la deformación es homogénea.
- Calcular \mathbf{C} , el tensor derecho de deformación de Cauchy-Green.
- Calcular la velocidad material y la velocidad espacial.
- Calcular la aceleración espacial de dos formas diferentes.
- Calcular el alargamiento λ en el punto $(X_1, X_2, X_3) = (1, 1, 0)$, en el instante $t = 2$, según la dirección del vector \mathbf{E}_1 de la base cartesiana.

Problema 2.7. El teorema de Cayley-Hamilton establece que todo tensor satisface su propio polinomio característico. Por ejemplo, el tensor derecho de alargamiento \mathbf{U} verifica

$$-\mathbf{U}^3 + I_1 \mathbf{U}^2 - I_2 \mathbf{U} + I_3 \mathbf{I} = \mathbf{0},$$

siendo I_1, I_2 e I_3 sus tres invariantes. Usando este resultado demostrar que dado un tensor simétrico definido positivo \mathbf{C} su raíz cuadrada $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$ se puede calcular sin necesidad de calcular su descomposición espectral mediante la relación

$$\mathbf{U} = \frac{1}{I_3 - I_1 I_2} (\mathbf{C}^2 + (I_2 - I_1^2)\mathbf{C} - I_1 I_3 \mathbf{I}).$$

Problema 2.8. Sea \mathbf{X} un punto cualquiera en la configuración de referencia de un cuerpo deformable y $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})$. Sobre el punto \mathbf{X} se define un vector unitario $\boldsymbol{\eta}_{ref}$ y sobre el punto \mathbf{x} otro vector $\boldsymbol{\eta}$, también de módulo unidad.

El tensor derecho de Cauchy-Green $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ se usa para calcular el alargamiento unitario en dirección de $\boldsymbol{\eta}_{ref}$ pues tomando un vector diferencial en dirección de $\boldsymbol{\eta}_{ref}$ y módulo dS éste se transforma en otro de módulo ds y calculamos

$$\lambda(\mathbf{X}; \boldsymbol{\eta}_{ref}) = \frac{ds}{dS} = \sqrt{\boldsymbol{\eta}_{ref} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\eta}_{ref}},$$

Demostrar que el alargamiento unitario que ha sufrido un vector diferencial de longitud ds en dirección de $\boldsymbol{\eta}$ se puede calcular como

$$\lambda(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{ds}{dS} = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{c}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\eta}}},$$

siendo \mathbf{c} el tensor de deformación de Cauchy definido por la relación $\mathbf{c}^{-1} = \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}$.

Problema 2.9. Un cilindro de radio R y altura H tiene un sistema cartesiano de coordenadas colocado en el centro de su base, con el eje Z orientado según el eje del cilindro.

Sea $\theta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una función conocida, diferenciable y tal que $\theta(0) = 0$ y supongamos que el cuerpo sufre una deformación $\boldsymbol{\varphi}$ que en coordenadas cartesianas del espacio se puede escribir como

$$\boldsymbol{\varphi}_t(X, Y, Z) = (\cos(\theta(t))X - \sin(\theta(t))Y, \sin(\theta(t))X + \cos(\theta(t))Y, 1 + \theta^2(t)Z).$$

- Calcular el tensor de deformación \mathbf{F} y su descomposición polar $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$. ¿Qué se puede interpretar a partir de los valores de \mathbf{R} y \mathbf{U} ?
- Calcular la velocidad material y espacial.
- Calcular la aceleración material. Además, calcular la aceleración espacial de dos maneras diferentes.
- Si $\theta(t) = \frac{\pi}{4}t$, calcula la aceleración material de la partícula $(X, Y, Z) = (R, 0, H)$ en el instante $t = 1$ y la aceleración espacial en la misma posición que ocupa dicha partícula en el espacio. Comprueba que ambos resultados son iguales.

Problema 2.10. En un cuerpo que experimenta un movimiento $\boldsymbol{\varphi}_t$ se escoge una partícula $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_{ref}$ y un vector unitario \mathbf{N} . Durante el movimiento dicho vector se transforma en $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ cuya dirección y tamaño, en general, cambian con el tiempo. Demostrar que la tasa de la longitud

$$\lambda^2 = \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}}$$

verifica

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda^2 = 2\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$$

donde $\mathbf{n} \circ \varphi_t = \mathbf{FN}$.

Problema 2.11. Un bloque deformable tiene una configuración de referencia definida por sus tres coordenadas cartesianas

$$X \in (0, \ell_X), \quad Y \in \left(-\frac{\ell_Y}{2}, \frac{\ell_Y}{2}\right), \quad Z \in \left(-\frac{\ell_Z}{2}, \frac{\ell_Z}{2}\right).$$

Dicho cuerpo experimental un movimiento φ_t cuyas componentes cilíndricas (r, θ, z) son

$$\varphi_r(X, Y, Z, t) = (2\alpha(t)X)^{1/2}, \quad \varphi_\theta(X, Y, Z, t) = \beta(t)Y, \quad \varphi_z(X, Y, Z, t) = \frac{Z}{\alpha(t)\beta(t)},$$

siendo α y β dos funciones diferenciables tales que $\alpha(t)\beta(t) \neq 0$.

- a) Calcular el gradiente de deformaciones en cualquier instante del movimiento y expresarlo en función de diádicas de los vectores de la base cartesiana en la configuración de referencia $\{\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\}$ y la base cilíndrica en el espacio $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$.
- b) Calcular la longitud de la recta que en la configuración de referencia tiene coordenadas $(X, 0, 0)$ con $X \in (0, \ell_X)$.
- c) Encontrar la deformación inversa φ_t^{-1} .
- d) Calcular las velocidades material y espacial del movimiento.

Problema 2.12. Se desea estudiar un sólido homogéneo, infinito e incompresible. El sólido tiene hueco esférico en el origen de coordenadas y el radio de dicho hueco en la configuración de referencia es H . El cuerpo se expande de forma simétrica de tal manera que radio del hueco toma valores $h(t)$ con $h(0) = H$.

- Encontrar la expresión de la deformación del cuerpo para todo punto e instante.
- Encontrar la velocidad y la aceleración, tanto en su expresión material como espacial.

Problema 2.13. Un sólido cilíndrico tiene altura H y radio R . El sólido sufre una deformación que lo retuerce dos vueltas completas. Al hacerlo, el cilindro se estira hasta una longitud $h = \alpha H$, con $\alpha > 1$, mientras que su radio se acorta hasta que éste se reduce a un valor $r = \beta R$, con $\beta < 1$.

- a) Postula una deformación que depende del tiempo. En el instante $t = 0$ la deformación coincide con la aplicación identidad y en el instante $t = T$, con la deformación total descrita anteriormente.
- b) Calcula la longitud en el instante final de una recta que en la configuración de referencia está sobre la superficie y es paralela al eje del cilindro.
- c) Calcula el volumen del cilindro en todo instante.
- d) Calcula el campo de velocidad y aceleración material en todo instante.

Problema 2.14. Considérese un cilindro deformable de radio a y altura h . Para estudiar la deformación de dicho cilindro se define un sistema cartesiano de coordenadas en el centro de la base del mismo, con el eje x_3 coincidiendo con la generatriz del cilindro. Si el cilindro sufre una deformación que lo retuerce un ángulo α en un tiempo T ,

- Escribe la expresión de la deformación del cilindro empleando coordenadas cartesianas, sabiendo que el material del cilindro es incompresible.
- Calcula el gradiente de deformación y el tensor derecho de Cauchy-Green.
- Calcula la velocidad y la aceleración de todos los puntos del cilindro.
- Si el material es neo-hookeano, calcula el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en todos los puntos e instantes.

Bibliografía

- [1] P. G. Ciarlet. *An introduction to differential geometry with applications to elasticity*. Springer, 2005.
- [2] W. S. Slaughter. *The linearized theory of elasticity*. Birkhauser, Boston, 2002.

Capítulo 3

Fuerzas sobre un medio continuo

En este capítulo estudiamos el tipo de fuerzas que actúan sobre un cuerpo continuo y describimos sus características de la manera más general posible. Para ello se presenta el concepto de *tensión* mecánica, un término fundamental para el estudio de la mecánica de sólidos y fluidos y que es consecuencia directa de la naturaleza continua de dichos cuerpos. Si bien es posible presentar dicho concepto de un manera más o menos intuitiva, su definición rigurosa requiere un tratamiento formal más allá de los contenidos de este libro ([2],[1]).

3.1. Fuerzas exteriores e interiores

Como la mecánica trata de las fuerzas y su efecto sobre los cuerpos, el primer paso para describir la respuesta de un medio continuo consiste en describir qué fuerzas se pueden aplicar sobre este, y cuáles no.

En el caso de la partícula, las únicas fuerzas que se admiten son las fuerzas puntuales. En el modelo del sólido rígido, además de las primeras, se admiten momentos concentrados. En un medio continuo, sin embargo, *no se admite ninguna de las dos anteriores* y se permiten dos nuevos tipos de fuerzas llamadas fuerzas volumétricas y fuerzas de superficie.

Las *fuerzas volumétricas* son las que actúan sobre cada punto del interior del cuerpo y son proporcionales al volumen. Matemáticamente, este tipo de fuerzas, que se indican como \mathbf{f} , están definidas como un campo vectorial sobre la configuración deformada y pueden depender, en general, del tiempo así pues

$$\mathbf{f} : \mathcal{B}_t \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3 . \quad (3.1)$$

Las fuerzas volumétricas, por tanto, tienen dimensiones de fuerzas sobre volumen.

Las **fuerzas de superficie**, también llamadas fuerzas de contacto, son fuerzas aplicadas sobre el cuerpo a través de su contorno $\partial\mathcal{B}_t$. Matemáticamente se expresan como un campo vectorial, que también puede depender del tiempo, de la forma

$$\bar{\mathbf{t}} : \partial\mathcal{B}_t \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3 . \quad (3.2)$$

En mecánica, se denomina **tensión** a la fuerza aplicada sobre la unidad de área. A diferencia de la **presión**, la tensión tiene dirección y sentido. En ambos casos, su dimensión es de fuerza sobre superficie.

Un medio continuo sometido a fuerzas externas las transmite por su interior por lo que cualquier parte del mismo ha de sufrir también fuerzas a través de la superficie que la separa del resto del medio. Estas **fuerzas internas** no se pueden medir, puesto que para hacerlo habría que romper el cuerpo, pero su existencia se deduce lógicamente por el efecto de transmisión. De hecho, entre dos partes cualesquiera de un cuerpo en su configuración deformada, en principio, podrían intervenir fuerzas volumétricas, pero estas son tan pequeñas en la naturaleza que se desprecian en todos los modelos.

Las fuerzas superficiales que se transmiten entre dos partes pueden ser muy grandes y reciben en nombre de **tensiones** y dependen, en general, del punto del sólido que se investigue y de la superficie que separe las partes consideradas.

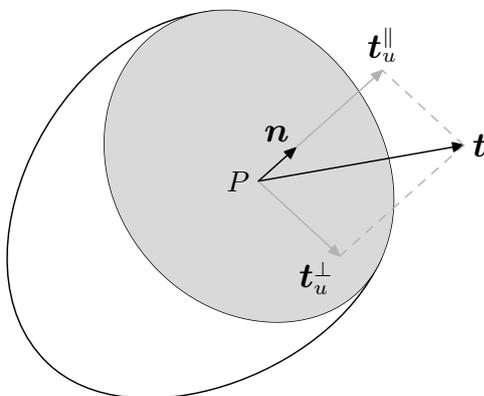


Figura 3.1: El vector tensión en un punto del interior de un cuerpo y la descomposición en sus componentes normal y tangencial.

Para estudiar este campo vectorial, supongamos que el cuerpo en su configuración deformada \mathcal{B}_t se divide en dos partes \mathcal{P}_t^+ y \mathcal{P}_t^- , y llamamos \mathcal{S}_t a la superficie que las separa. Entonces, en cada punto $x \in \mathcal{S}_t$ habrá una tensión $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathcal{S}_t, t)$.

La dependencia del campo \mathbf{t} sobre la superficie \mathcal{S}_t complica enormemente su tratamiento matemático. Fue Cauchy, en su trabajo sobre elasticidad,

quien postuló que el campo de tensiones en el interior de un cuerpo deformable sólo pueden depender localmente de dicha superficie, es decir, de su normal en dicho punto. El *principio de Cauchy* establece por tanto que la tensión que aparece al separar el cuerpo mediante la superficie \mathcal{S}_t es un campo vectorial de la forma

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) \quad (3.3)$$

siendo \mathbf{n} la normal a \mathcal{S}_t en \mathbf{x} . No hace muchos años se demostró que esta hipótesis no es necesaria, sino que se puede demostrar que así ocurre siempre, y este resultado se conoce como el teorema de Noll, su descubridor.

El vector \mathbf{t} es la fuerza por unidad de superficie en la configuración deformada y también se conoce como el *vector de tensión de Cauchy* o *vector de tensión verdadera*. Si en lugar de emplear una tensión como fuerza por unidad de superficie en la configuración deformada se define una fuerza por unidad de superficie de referencia, esto define una nueva tensión \mathbf{T} que se conoce como el *vector de tensión de Piola-Kirchhoff*, o *vector de tensión nominal*. Empleando la notación del capítulo 2 para los diferenciales de superficie en las dos configuraciones, se verifica que

$$\mathbf{t} \, da = \mathbf{T} \, dA . \quad (3.4)$$

La versión material del principio de Cauchy establece que existe un campo vectorial $\hat{\mathbf{T}}$ tal que

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{X}, \mathbf{N}, t) , \quad (3.5)$$

siendo $\mathbf{X} = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x})$ y el vector \mathbf{N} , la normal a \mathcal{S}_{ref} en \mathbf{X} que verifica $\text{adj}(\mathbf{F})\mathbf{N} \, dA = \mathbf{n} \, da$.

3.2. El tensor de tensiones

Dado un cuerpo deformable sometido a fuerzas, se deduce que debe de existir un campo vectorial de tensiones \mathbf{t} que actúa sobre dos partes cualesquiera en las que se puede separar dicho cuerpo. Por el postulado de Cauchy se introduce una función $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$ que depende de tres argumentos, a saber, el punto, un vector unitario y el tiempo. El siguiente teorema, demostrado por el mismo Cauchy, explica que esta dependencia funcional es más sencilla de lo que inicialmente se supone.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Cauchy). *En un medio continuo deformable existe un único campo tensorial $\boldsymbol{\sigma} : \mathcal{B}_t \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que verifica*

$$\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} . \quad (3.6)$$

El tensor $\boldsymbol{\sigma}$ se conoce como el **tensor de tensiones de Cauchy** o **verdaderas**. Más aún, también existe otro campo tensorial $\mathbf{P} : \mathcal{B}_{ref} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{N}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)\mathbf{N} \quad (3.7)$$

siendo \mathbf{N} el vector normal a la superficie \mathcal{S}_{ref} en el punto $\mathbf{X} = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x})$. El tensor \mathbf{P} , que es de dos puntos, se conoce como el **primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff** o **nominales**.

Demostración. La demostración del teorema de Cauchy emplea los argumentos propuestos por el mismo Cauchy, usando el llamado “tetraedro de Cauchy”. Para esta demostración ignoramos la dependencia temporal de las tensiones, simplificando la notación.

Sea un tetraedro diferencial recto centrado en el punto $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_t$, con uno de sus vértices coincidente con el centro de un sistema de coordenadas de base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. La cara opuesta al origen del sistema de coordenadas tiene superficie da y normal $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$. Las otras tres caras tienen superficies

$$da_1 = n_1 da, \quad da_2 = n_2 da, \quad da_3 = n_3 da. \quad (3.8)$$

Llamando \mathbf{t} a la tensión sobre la cara mayor y $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ a las tensiones sobre las otras tres caras se tiene que

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{n}), \quad \mathbf{t}_1 = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_1), \quad \mathbf{t}_2 = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{t}_3 = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_3), \quad (3.9)$$

y por tanto el equilibrio de fuerzas se expresa como:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) da + \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_1)n_1 da + \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_2)n_2 da + \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_3)n_3 da \\ + \mathbf{f}(\mathbf{x}) dv = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Como las fuerzas volumétricas multiplican a un infinitésimo de orden superior, éstas se pueden despreciar en la suma anterior. Para continuar, tomamos el límite en la ecuación anterior cuando $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{e}_1$ para obtener

$$\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) = -\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_1). \quad (3.11)$$

Como este resultado es válido para cualquier base y vector \mathbf{e}_1 se concluye que

$$\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}), \quad (3.12)$$

resultado conocido como el **corolario de Cauchy**. Utilizando este resultado en la ecuación (3.10) obtenemos

$$\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)n_1 + \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2)n_2 + \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3)n_3. \quad (3.13)$$

Esta relación expresa que la dependencia del vector \mathbf{t} en la normal \mathbf{n} es *lineal* y por lo tanto existe un tensor que denominamos $\boldsymbol{\sigma}$ tal que

$$\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n}, \quad (3.14)$$

y cuya expresión, a partir de la relación (3.13), ha de ser

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) \otimes \mathbf{e}_1 + \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{e}_2 + \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}_3. \quad (3.15)$$

Si la normal \mathbf{n} coincide con una normal a la superficie exterior del cuerpo también se puede concluir que las fuerzas de superficie están relacionadas con el tensor de Cauchy a través de la expresión

$$\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n} . \quad (3.16)$$

Para demostrar la existencia del primer tensor de Piola-Kirchhoff, basta con recordar la definición de la tensión nominal y emplear la primera parte de este teorema. Usando ambos resultados, y eliminando las dependencias funcionales por simplicidad, se sigue que:

$$\mathbf{T} \, dA = \mathbf{t} \, da = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \, da = \boldsymbol{\sigma}J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N} \, dA,$$

por lo que se satisface la relación (3.7) si el tensor de Piola-Kirchhoff es

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} .$$

□

El tensor de tensión nominal parece un objeto extraño. Sin embargo, es muy útil para mecánica de sólidos donde la configuración de referencia se conoce y la deformada es una incógnita.

3.2.1. Interpretación física de las componentes del tensor de tensiones

Cada una de las componentes de $\boldsymbol{\sigma}$ en una base tiene un significado especial y en reciben nombres que hacen referencia a su dirección, como veremos a continuación. Si escogemos una base cualquiera $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, el vector tensión en un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ que actúa sobre una superficie de normal \mathbf{e}_i que pasa por dicho punto es $\mathbf{t}_i = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_i$. La *tensión normal* a esta superficie es por tanto

$$\sigma_{ii} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{t}_i = \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_i \quad (3.17)$$

(no hay una suma en los subíndices repetidos) y las *tensiones tangenciales o cortantes* a esta superficie son pues

$$\sigma_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}_j \quad \text{con } i \neq j . \quad (3.18)$$

En general, la componente σ_{ij} es el valor de la tensión que actúa sobre una superficie de normal \mathbf{e}_j , en dirección \mathbf{e}_i , y cuando $i \neq j$, a veces se emplea la notación $\tau_{ij} = \sigma_{ij}$ para las tensiones tangenciales.

Para un plano cualquiera de normal \mathbf{n} , no necesariamente un plano coordenado, el vector tensión puede descomponerse en una componente normal y otra tangencial. La primera tiene una proyección sobre \mathbf{n} que es

$$\sigma_n := \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} . \quad (3.19)$$

La componente sobre el plano de normal \mathbf{n} , es decir la componente tangencial, tiene por módulo

$$|\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - \sigma_n^2} . \quad (3.20)$$

Estos dos escalares se conocen como las *componentes intrínsecas* de la tensión sobre el plano de normal \mathbf{n} y se llaman así pues no dependen del sistema de coordenadas en el que se exprese la tensión y la normal.

3.2.2. Descomposición del tensor de tensiones

Como todo tensor de segundo orden, el tensor $\boldsymbol{\sigma}$ puede descomponerse en una parte esférica y otra desviadora. Si definimos la *presión* en un punto como la función

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (3.21)$$

entonces podemos escribir

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{s}, \quad (3.22)$$

siendo \mathbf{s} la parte desviadora de la tensión. La presión p es la fuerza normal por unidad de área media que se ejerce sobre las seis caras de un cubo infinitesimal y por tanto coincide con el concepto físico de presión.

3.3. Tensiones principales

En el capítulo 4 se demostrará que el tensor de tensiones de Cauchy es simétrico. Tomando este dato como bueno, podemos emplear los resultados de la sección 1.4.2 y asegurar que $\boldsymbol{\sigma}$ tiene tres autovalores reales $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ y tres autovectores asociados $\mathbf{w}_I, \mathbf{w}_{II}, \mathbf{w}_{III}$ —llamados las direcciones principales de tensión— que forman una base ortonormal en la que la tensión se diagonaliza.

Las tensiones principales satisfacen la propiedad

$$\sigma_I = \max_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \geq \min_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \sigma_{III} , \quad (3.23)$$

es decir que sobre los planos de normal \mathbf{w}_I y \mathbf{w}_{III} actúan las tensiones con la máxima y mínima componente normal, respectivamente. Pero es que además, para cualquier pareja de direcciones principales de tensión distintas ($\alpha \neq \beta$) se cumple que

$$\tau_{\alpha\beta} = \mathbf{w}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{w}_\beta = \mathbf{w}_\alpha \cdot \sigma_\beta \mathbf{w}_\beta = 0 . \quad (3.24)$$

En otras palabras, en un estado de tensión arbitrario no hay tensiones tangenciales sobre los planos cuyas normales sean direcciones principales de tensión. Nótese que en la expresión (3.24) no se usa la convención de índices repetidos.

3.4. Estados tensionales sencillos

Identificamos en esta sección algunos estados tensionales que son relevantes por su sencillez y porque aparecen en algunas estructuras cuando se ven sometidas a cargas también sencillas.

En primer lugar, como en el caso de la deformación, definimos un estado de *tensión homogénea* como aquel en el que el tensor de tensiones de Cauchy no depende del punto en la configuración deformada.

El estado tensional más simple es el de *tensión o compresión pura*. En ellos, el tensor de tensión de Cauchy tiene por expresión

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} , \quad (3.25)$$

siendo \mathbf{n} un vector unitario cualquiera. Si $\alpha > 0$ se dice que el punto está sometido a tracción y si $\alpha < 0$, a compresión. En este estado, la dirección \mathbf{n} es una dirección principal de tensión asociada a la tensión principal α . Cualquier vector perpendicular a \mathbf{n} es una dirección principal asociada a la tensión principal cero. Como hay un autovalor repetido dos veces se dice que el estado tensional es cilíndrico.

Un punto se encuentra sometido a un estado de *tensión hidrostática* si el tensor de Cauchy es de la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} . \quad (3.26)$$

El escalar p es la *presión* y cualquier dirección del espacio es una dirección principal así que el estado se llama esférico. La presión puede ser positiva o negativa.

Por último, un punto se encuentra en un estado de *cortante puro* si el tensor de tensiones es de la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \tau (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) , \quad (3.27)$$

siendo \mathbf{m}, \mathbf{n} dos vectores unitarios ortogonales entre sí. Las tensiones principales de este estado tensional son $\sigma_I = \tau$, $\sigma_{II} = 0$ y $\sigma_{III} = -\tau$.

3.5. Otros tensores de tensión

En el capítulo 2 se vio que existen infinitos tensores de deformación y que todos ellos coinciden con el tensor de deformaciones infinitesimales cuando la deformación es muy pequeña. En este capítulo se han presentado *dos* tensores de tensión, el de Cauchy y el primero de Piola-Kirchhoff. Pues bien, también en este caso existen infinitos tensores de tensión que se emplean según la conveniencia del modelo y la deformación que se use.

Como se demostrará más adelante, el primer tensor de Piola-Kirchhoff no es simétrico y se define el *segundo tensor de Piola-Kirchhoff* como

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} , \quad (3.28)$$

que es simétrico al serlo también σ .

Resumen de fórmulas importantes

Teorema de Cauchy

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{X})\mathbf{N}$$

Primer tensor de tensión de Piola-Kirchhoff

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$$

Segundo tensor de tensión de Piola-Kirchhoff

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}$$

Componente normal de la tensión

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

Componente tangencial de la tensión

$$|\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - \sigma_n^2}$$

Problemas

Problema 3.1. Un cilindro de sección A y longitud L está fabricado de un material incompresible. En su configuración de referencia está alineado con el eje Z de un sistema de coordenadas cartesiano colocado en el centro de una de sus caras planas y todos sus puntos tienen coordenada Z no negativa.

Sobre la cara plana más alejada del plano XY se aplican unas tensiones normales $\bar{\mathbf{t}} = \sigma \mathbf{k}$ de tal manera que el cilindro se deforma alargándose y en su configuración deformada también tiene forma cilíndrica, ahora de longitud ℓ . La superficie lateral del cilindro está en todo momento libre de tensiones. Se pide:

- Encontrar una expresión para el campo de deformación φ y calcular a partir de esta el gradiente de deformación (nota: usar coordenadas cilíndricas)
- Plantear una expresión plausible del tensor de tensiones de Cauchy de tal manera que se satisfagan las condiciones de contorno de tensión en todas las caras del cilindro deformado.
- Encontrar la expresión de los tensores de Piola-Kirchhoff.
- Deducir la expresión *vectorial* de la tensión de Kirchhoff en todo el contorno del cilindro.

Problema 3.2. Un cilindro de tiene su eje alineado con la dirección \mathbf{e}_1 y está sometido a un estado tensional $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = T \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$. En la configuración deformada el cilindro tiene longitud L y sus puntos tienen coordenada $0 \leq x_1 \leq L$.

- Encontrar la fuerza de superficie que se ejerce sobre la cara $x_1 = L$ con normal $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$ y sobre la cara $x_1 = 0$ y normal $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$.
- Comprobar que no existen fuerzas de superficie sobre la cara lateral.
- Calcular el vector tensión en una superficie interna de normal $\mathbf{n} = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$. Encontrar la componente normal y tangencial de este vector de tensiones.

Problema 3.3. La norma de la parte desviadora del tensor de tensión de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ juega un papel muy importante en mecánica de sólidos, en particular en modelos inelásticos. Llamando a dicha componente desviadora \mathbf{s} , demostrar que el invariante $J_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{s}\|^2$ se puede escribir como

$$J_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{6} ((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2) .$$

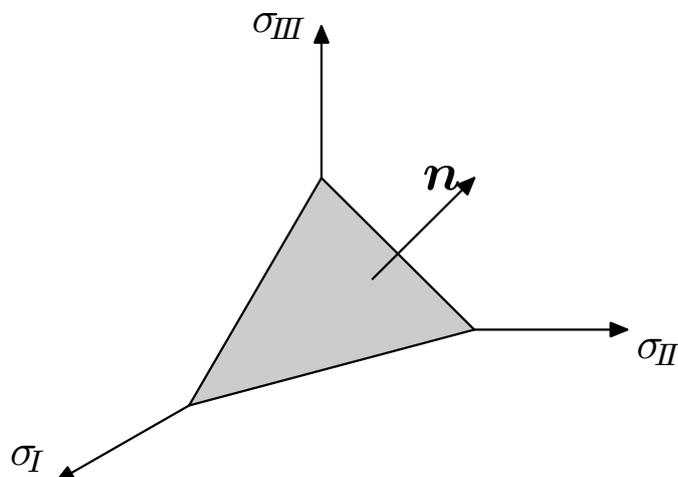


Figura 3.2: Figura del problema 3.3.

Considerar ahora las tensiones sobre un plano octaédrico del espacio de tensiones principales (ver figura 3.2), es decir, de normal

$$\mathbf{n} = \pm \frac{1}{3} \mathbf{v}_I \pm \frac{1}{3} \mathbf{v}_{II} \pm \frac{1}{3} \mathbf{v}_{III}.$$

Demostrar que la componente normal y tangencial de la tensión sobre cualquiera de esos planos son

$$\sigma_n = \frac{I_1(\boldsymbol{\sigma})}{3}, \quad \tau = \sqrt{\frac{2}{3} J_2(\mathbf{s})}.$$

Problema 3.4. Un bloque deformable tiene una configuración de referencia definida por sus tres coordenadas cartesianas

$$X \in (A, B), \quad Y \in \left(-\frac{\ell_Y}{2}, \frac{\ell_Y}{2}\right), \quad Z \in \left(-\frac{\ell_Z}{2}, \frac{\ell_Z}{2}\right),$$

con $B > A > 0$. Dicho cuerpo experimenta un movimiento φ_t cuyas componentes cilíndricas (r, θ, z) son

$$\varphi_r(X, Y, Z, t) = (2\alpha(t)X)^{1/2}, \quad \varphi_\theta(X, Y, Z, t) = \beta(t)Y, \quad \varphi_z(X, Y, Z, t) = \frac{Z}{\alpha(t)\beta(t)},$$

siendo α y β dos funciones diferenciables tales que $\alpha(t)\beta(t) \neq 0$.

- Representa gráficamente la deformación.
- Sobre las caras $\theta = \pm \beta(t) \frac{\ell_Y}{2}$ actúan tensiones que tienen por expresión $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \sigma(t) \left(r - \frac{A+B}{2}\right) \mathbf{e}_\theta$. Calcular la fuerza y el momento resultante de dicha distribución de tensiones en cada una de estas dos caras.

- c) Sabiendo que el resto de las caras del bloque están libres de tensiones, comprueba que el tensor $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{e}_\theta$ cumple las condiciones de contorno de tensión de todo el cuerpo.
- d) Encuentra la expresión del primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y dibuja el campo de vectores materiales de tensión.

Problema 3.5. Sea \mathbf{T} un campo de tensores definido en $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ que verifica $\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}$ en Ω y $\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{t}$ en el contorno $\partial\Omega$. Demostrar, empleando el teorema de Gauss, que el valor medio del campo tensorial

$$\langle \mathbf{T} \rangle \equiv \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{T} \, dV$$

también se puede calcular como

$$\langle \mathbf{T} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x} \, dA .$$

(Ayuda: usar el teorema de Gauss para el tensor $\mathbf{S} = \mathbf{T}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})$, siendo \mathbf{a} un vector constante y \mathbf{x} el vector de posición del punto.

Bibliografía

- [1] P. G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity*. North-Holland, 1988.
- [2] C.-C. Wang and C. Truesdell. *Introduction to rational elasticity*, volume 1. Springer Science & Business Media, 1973.

Capítulo 4

Leyes de balance y conservación

Los cuerpos continuos, sin excepción, se comportan verificando ciertas leyes de balance o conservación que están dictadas por la termodinámica o la física en general y que la Mecánica de Medios Continuos se limita a recoger y expresar con un lenguaje matemático. Estos principios, por tanto, no son demostrables.

El objetivo de este capítulo es tomar las leyes fundamentales de la termomecánica y expresarlas de manera precisa utilizando el lenguaje de la Mecánica de Medios Continuos. Manipulando estas expresiones será posible formularlas de manera integral o diferencial y, en cualquier caso, tanto de forma espacial como material. Esta última distinción no se puede valorar todavía, pero será fundamental para el estudio de los sólidos y los fluidos en capítulos posteriores.

Es importante subrayar la importancia de la termodinámica para los postulados de este capítulo [1]. Un estudio más profundo de la Mecánica de Medios Continuos requeriría dedicar más espacio a su análisis detallado [2, 3].

4.1. Curvas, superficies y volúmenes materiales

En general, las leyes de balance expresan cómo cambia el valor de alguna cantidad física definida sobre un conjunto de puntos del cuerpo o del espacio. Para poder enunciar cualquiera de estas leyes es necesario, por tanto, recordar la forma en la que se calculan las derivadas temporales de cantidades integrales definidas sobre este tipo de conjuntos.

Consideremos el movimiento $\varphi_t : \mathcal{B}_{ref} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un cuerpo continuo y $C(\alpha)$ una curva $[a_1, a_2] \ni \alpha \mapsto \mathcal{B}_{ref}$. Una **curva material** c_t es el lugar geométrico del espacio ocupado por la curva C en cada instante de tiempo,

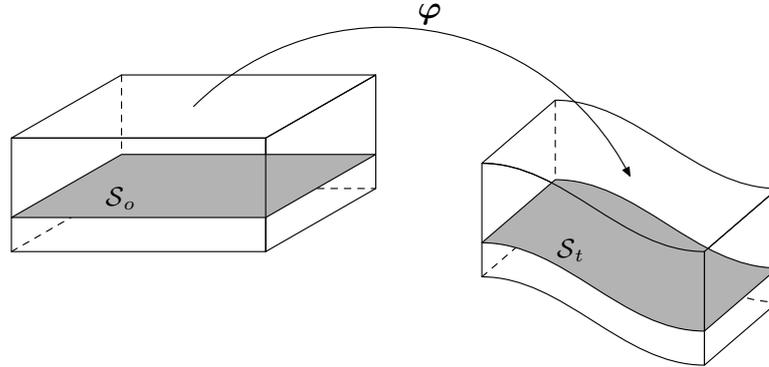


Figura 4.1: Una superficie material se deforma acompañando al resto del cuerpo.

es decir,

$$c_t(\alpha) = \varphi_t(C(\alpha)) = (\varphi_t \circ C)(\alpha) . \quad (4.1)$$

De manera análoga, si se considera ahora una superficie en el cuerpo $\mathbf{X} = S(\alpha, \beta)$ con $\alpha \in [a_1, a_2]$ y $\beta \in [b_1, b_2]$, una **superficie material** es el lugar geométrico del espacio ocupado por dicha superficie en cada instante de tiempo al ser arrastrada por el movimiento, es decir

$$s_t(\alpha, \beta) = \varphi_t(S(\alpha, \beta)) = (\varphi_t \circ S)(\alpha, \beta) . \quad (4.2)$$

Por último, un **volumen material** es la región del espacio ocupada por las partículas que forman una región del cuerpo \mathcal{B}_{ref} cuando estas se arrastran por el movimiento. Es decir, dada una región $P \subseteq \mathcal{B}_{ref}$, un volumen material es la región del espacio

$$p_t = \varphi_t(P) . \quad (4.3)$$

En este capítulo será necesario evaluar integrales en curvas, superficies o volúmenes materiales. Es a menudo útil en estos casos realizar un cambio de variable para expresar dichas integrales en el dominio de referencia. Por ejemplo, si $\psi : \mathcal{S} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar definido en el espacio, una integral de curva se puede expresar como

$$I_1(t) = \int_{c_t} \psi(\mathbf{x}, t) ds = \int_C \psi(\varphi_t(\mathbf{X}), t) (C'(\alpha) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{X}, t) C'(\alpha))^{1/2} d\alpha . \quad (4.4)$$

Empleando el mismo razonamiento, una integral sobre una superficie material de un campo vectorial $\mathbf{v} : \mathcal{S} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ se puede escribir de dos maneras

$$I_2(t) = \int_{s_t} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) da = \int_S \mathbf{v}(\varphi_t(\mathbf{X}), t) \cdot \text{adj}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{N}(\mathbf{X}) dA . \quad (4.5)$$

Por último, la integral sobre una región o volumen material también se puede escribir de dos formas:

$$I_3(t) = \int_{\mathcal{P}_t} \psi(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_P \psi(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X}), t) J(\mathbf{X}, t) \, dV . \quad (4.6)$$

4.1.1. Derivadas de integrales sobre conjuntos materiales

En varias ocasiones, durante el transcurso de este capítulo, será necesario calcular la derivada de cantidades integrales definidas sobre conjuntos materiales. Por ejemplo, sea I una cantidad definida a través de una integral sobre un volumen material

$$I = \int_{\mathcal{P}_t} \psi(\mathbf{x}, t) \, dv , \quad (4.7)$$

donde $\mathcal{P}_t = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathcal{P}_{ref})$ y $\psi(\mathbf{x}, t)$ es una función escalar cualquiera definida sobre puntos del espacio. Si se desea calcular la derivada temporal de I , habrá que tener en cuenta que no sólo el integrando, sino también el dominio de integración, dependen del tiempo. Para realizar esta derivada basta con realizar un cambio de variable en el dominio de integración, expresándolo en un dominio de integración fijo, tomar las derivadas necesarias y deshacer el cambio de variable. El procedimiento, de forma detallada, es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \psi(\mathbf{x}, t) \, dv \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\boldsymbol{\varphi}_t(\mathcal{P}_{ref})} \psi(\mathbf{x}, t) \, dv \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_{ref}} \psi(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{P}_{ref}} \left(\frac{d}{dt} \psi(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) + \psi(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) \dot{J}(\mathbf{X}, t) \right) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{P}_{ref}} \left(\frac{d}{dt} \psi(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) + \psi(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \circ \boldsymbol{\varphi}_t)(\mathbf{X}, t) \right) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{D}{Dt} \psi(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) \, dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\psi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \right) \, dv \end{aligned} \quad (4.8)$$

Se ha empleado que la derivada temporal del jacobiano es $\dot{J} = J (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \circ \boldsymbol{\varphi}_t)$.

Esta forma de calcular derivadas de cantidades materiales es válida también, con las modificaciones pertinentes, para derivar cantidades integrales sobre curvas y superficies materiales. La idea, como en el caso desarrollado,

consiste siempre en transformar el dominio de integración en un dominio fijo en el espacio de referencia y que permita derivar sin problema dentro de la integral. Una vez realizadas estas derivadas, el cambio de variable ha de deshacerse.

4.1.2. Teorema del transporte de Reynolds

La derivada temporal de una cantidad integral I definida sobre un volumen material $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_{ref})$ se ha calculado en la expresión (4.8). Esta cantidad admite una expresión alternativa que es objeto del siguiente teorema:

Teorema 4.1.1. *Sea $\psi(\mathbf{x}, t)$ un campo escalar espacial. Para toda región material $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_{ref})$ con contorno $\partial\mathcal{P}_t$ y normal exterior $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, la derivada de la integral I definida en (4.7) viene dada por*

$$\dot{I} = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\partial\psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \psi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) da . \quad (4.9)$$

Demostración. En primer lugar, observamos la relación elemental:

$$\frac{D\psi}{Dt} + \psi \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\psi \mathbf{v}) . \quad (4.10)$$

A partir del desarrollo (4.8) y empleando el teorema de la divergencia se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{D}{Dt} \psi(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\psi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \right) dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \psi(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) da . \end{aligned} \quad (4.11)$$

□

El teorema de Reynolds indica que el cambio en la integral I tiene dos componentes: la primera se debe a la variación temporal de la función ψ , ignorando el cambio del dominio sobre el que se integra. La segunda contribución se debe al flujo saliente de la cantidad ψ a través de la superficie que delimita el volumen material \mathcal{P}_t .

4.2. Curvas, superficies y volúmenes de control

Además de los conjuntos tratados en la sección anterior existe otro tipo que también son de utilidad en la Mecánica de Medios Continuos, y en la

teoría de campos en general. Bajo el nombre de *conjuntos de control* se hace referencia simplemente a conjuntos fijos en el espacio. Por ejemplo, una superficie de control podría ser un plano fijo en el espacio. A diferencia de las superficies materiales, las superficies de control pueden coincidir con la posición de partículas del medio continuo *que cambian con el tiempo*. Si el medio continuo se está deformando, es obvio que su intersección con una superficie fija (respectivamente, curva o volumen) corresponda a partículas distintas.

Las superficies y volúmenes de control son especialmente útiles en Mecánica de Fluidos, donde la posición en cada instante de las partículas del fluido suele ser irrelevante. En cambio, la interacción (de fuerza, calor, trabajo, etc) con un dominio fijo suele ser de interés. Por ejemplo considérese el flujo de agua a través de una tubería. El volumen de control que puede considerarse es el que queda delimitado por la superficie de la tubería y dos secciones transversales. Este dominio es fijo, y puede ser necesario conocer el comportamiento del agua que lo ocupa en un cierto instante. Un instante posterior, las partículas contenidas en dicha región habrán cambiado, aunque esta siga igual.

4.2.1. Flujo a través de una superficie de control

Sea ψ un campo escalar que indica la concentración en un medio continuo de una cierta cantidad por unidad de volumen. Por ejemplo, la salinidad en un fluido, la cantidad de contaminante en el mismo, etc. Considérese también una superficie de control \mathcal{S} con normal exterior $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Si se desea calcular el flujo de dicha cantidad a través de la superficie de control éste se puede calcular integrando los flujos diferenciales

$$d\phi = \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da . \quad (4.12)$$

Esta integral es pues

$$\phi = \int_{\mathcal{S}} d\phi = \int_{\mathcal{S}} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da , \quad (4.13)$$

y sus unidades son las de la cantidad ψ , por unidad de tiempo.

4.3. Balance de masa

La masa de un medio continuo es una cantidad constante, al menos en los medios que consideramos en este curso. A partir de este postulado podemos obtener relaciones matemáticas que indican cómo se redistribuye la masa en un cuerpo. Existen varias maneras de expresar este postulado, todas ellas equivalentes, y en esta sección se presentan tres de ellas.

Antes de obtener las expresiones matemáticas del *principio de conservación de masa* definimos el concepto de *densidad*. Esta cantidad,

que denominamos ρ , es la masa específica de un cuerpo y puede depender del punto y del instante en el que se calcule. Para definirla, se considera una región $\Omega(\mathbf{x})$ que contiene al punto \mathbf{x} , de volumen $v(\mathbf{x})$ y con masa $m(\Omega(\mathbf{x}), t)$. Entonces se define

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{v(\mathbf{x}) \rightarrow 0} \frac{m(\Omega(\mathbf{x}), t)}{v(\mathbf{x})} . \quad (4.14)$$

A partir de la definición se observa que la densidad ρ es un campo escalar espacial. Repitiendo el mismo argumento en el espacio de referencia también se puede definir una **densidad de referencia** ρ_{ref} que, en general, dependerá de la partícula \mathbf{X} , pero no del tiempo.

4.3.1. Expresión integral de la conservación de masa

El principio de conservación de masa se puede expresar matemáticamente indicando que la masa de cualquier volumen material del cuerpo continuo es la misma en todo instante:

$$\int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \, dV = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \, dv \quad (4.15)$$

siendo, como siempre, $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_{ref})$.

4.3.2. Expresión diferencial lagrangiana del principio de conservación de masa

La relación integral (4.15) expresa de forma muy clara el principio de conservación de masa pero no muy útil a la hora de resolver problemas. La expresión equivalente que ahora deducimos sí que se emplea con más facilidad.

A partir de la expresión integral (4.15), y mediante un cambio de variable de la integral del lado derecho se obtiene la relación:

$$\int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \, dV = \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) \, dV . \quad (4.16)$$

Puesto que las dos integrales son iguales, y dicha igualdad es válida para cualquier región \mathcal{P}_{ref} , los integrando han de ser iguales en todo punto, es decir,

$$\rho_{ref} = (\rho \circ \varphi_t) J . \quad (4.17)$$

Como todas las cantidades en esta igualdad dependen de las coordenadas materiales del punto (y del tiempo), se dice que es la expresión lagrangiana de la conservación de masa.

4.3.3. Expresión diferencial euleriana. Ecuación de continuidad

El principio de conservación de la masa expresa que la masa de una región material cualquiera \mathcal{P}_{ref} en un medio continuo, calculada mediante (4.15) es una cantidad fija y por lo tanto su derivada temporal es nula. Si llamamos $m(\mathcal{P}_{ref})$ a la masa total de dicha región material, mediante la expresión (4.8) se tiene que

$$\dot{m}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \left(\frac{D}{Dt} \rho(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) dv = 0 . \quad (4.18)$$

Puesto que esta relación ha de ser válida para cualquier región material, el integrando debe de anularse. Se deduce que la expresión diferencial de la ley de conservación de masa se puede expresar también como:

$$\frac{D}{Dt} \rho(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.19)$$

Los campos que aparecen en esta última expresión depende de las coordenadas espaciales \mathbf{x} y del tiempo, y por lo tanto es una relación *euleriana*. Nótese que la derivada temporal de la densidad que aparece en la expresión anterior es la derivada temporal material, es decir, cuando la derivada parcial respecto al tiempo cuando la partícula \mathbf{X} permanece constante. Mediante las fórmulas estudiadas en el capítulo de cinemática la expresión (4.19) se puede desarrollar de la siguiente manera:

$$0 = \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) , \quad (4.20)$$

o de forma más compacta:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0 . \quad (4.21)$$

Esta última expresión diferencial se conoce como la ***ecuación de continuidad***.

4.3.4. Balance de masa en un volumen de control

Sea \mathcal{P} un volumen *de control* cualquiera, con contorno $\partial \mathcal{P}$ de normal exterior $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. El cambio de la masa total de dicho volumen se puede calcular, empleando la ecuación de continuidad y el teorema de la divergencia, de la

siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \dot{m}(\mathcal{P}) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho(\mathbf{x}, t) \, dv \\
 &= \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \, dv \\
 &= - \int_{\mathcal{P}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \, dv \\
 &= - \int_{\partial \mathcal{P}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, da .
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Esta expresión indica que el cambio de la masa contenida en la región de control es debido al flujo saliente de masa.

▷ **Ejemplo 4.3.1.** Sea $\psi(\mathbf{x}, t)$ un campo espacial escalar, vectorial o tensorial y \mathcal{P}_t una región material de un cuerpo continuo. Demostrar la siguiente identidad:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{D\psi}{Dt}(\mathbf{x}, t) \, dv . \tag{4.23}$$

Para demostrar la identidad basta con emplear el mismo proceso que en la sección 4.1, transformando la integral a un dominio fijo:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) \, dv &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) \, dV \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \, dV \\
 &= \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \frac{d}{dt} \psi(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \, dV \\
 &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{D\psi}{Dt}(\mathbf{x}, t) \, dv .
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

◁

4.3.5. Incompresibilidad

Se dice que una deformación es *isocórica* cuando el volumen de toda región material permanece constante durante la misma. Para ello es imprescindible que el jacobiano de la deformación $J = \det \mathbf{F}$, que expresa el cambio de volumen diferencial, sea constante y de valor unidad. Un cuerpo continuo es *incompresible* si únicamente admite deformaciones isocóricas.

En una deformación isocórica, la densidad de una partícula material no cambia, es decir,

$$\rho \circ \varphi_t = \rho_{ref} , \tag{4.25}$$

que en forma de tasa se puede escribir como

$$\frac{D\rho}{Dt}(\mathbf{x}, t) = 0 . \quad (4.26)$$

A partir de la expresión lagrangiana del balance de masa (4.17) se deduce que en una deformación isocórica $J(\mathbf{X}, t) = 1$. Finalmente, a partir de la expresión euleriana de la ecuación del balance de masa (4.19) concluimos que en este tipo de deformaciones

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.27)$$

▷ **Ejemplo 4.3.2.** Demostrar que un flujo cuyo campo de velocidad espacial es:

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{3x_2}{x_1^2 + x_2^2} \mathbf{e}_1 - \frac{3x_1}{x_1^2 + x_2^2} \mathbf{e}_2 , \quad (4.28)$$

es incompresible.

Basta con calcular la divergencia del campo de velocidades:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) = -\frac{6x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{6x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = 0 . \quad (4.29)$$

◁

▷ **Ejemplo 4.3.3.** Un sólido sufre una deformación cuya expresión es

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = (e^{-t}X_1, e^{-t}X_2, e^{2t}X_3) . \quad (4.30)$$

Demostrar que la deformación es incompresible.

Si se calcula el gradiente de la deformación \mathbf{F} y su determinante:

$$[\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)] = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} , \quad J(\mathbf{X}, t) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = 1 ,$$

se comprueba que éste último es constante y tiene valor unidad, con lo que se verifica la incompresibilidad de la deformación. ◁

4.4. Balance de cantidad de movimiento

La segunda ley de Newton, que establece la proporcionalidad entre las fuerzas aplicadas sobre un sistema de partículas y el cambio en su cantidad de movimiento, es válida también en el contexto de los medios continuos. Para este tipo de cuerpos se establecen a continuación las expresiones integrales y diferenciales de dicho principio.

En primer lugar definimos el concepto de **cantidad de movimiento** \mathbf{L} de una región material cualquiera $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_{ref})$ de un cuerpo continuo. Esta cantidad viene dada por la integral de la cantidad de movimiento de cada una de las partículas que lo conforman, es decir,

$$\mathbf{L}(\mathcal{P}_t) := \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv . \quad (4.31)$$

En la expresión anterior se presentan la forma lagrangiana y euleriana de la cantidad de movimiento de la región \mathcal{P}_t .

La región \mathcal{P}_t puede estar sometida a **fuerzas exteriores de origen másico** o de **contacto** sobre su contorno $\partial\mathcal{P}_t$. Las fuerzas exteriores aplicadas sobre un cuerpo continuo por unidad de masa en la configuración deformada están descritas por el campo vectorial $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$. Las fuerzas sobre el contorno, definidas por unidad de superficie en la configuración deformada, se indicarán como $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$.

Para los desarrollos que siguen definimos el campo de fuerzas por unidad de masa en la configuración de referencia \mathbf{B} y el campo de fuerzas de superficie por unidad de área en la configuración de referencia \mathbf{T} mediante las expresiones:

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = (\mathbf{b} \circ \varphi)(\mathbf{X}, t) , \quad \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) dA = (\mathbf{t} \circ \varphi)(\mathbf{X}, t) da . \quad (4.32)$$

La resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la región material \mathcal{P}_t se puede expresar de las dos maneras siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ext}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial\mathcal{P}_{ref}} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) dA \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da . \end{aligned} \quad (4.33)$$

4.4.1. Expresión integral del balance de cantidad de movimiento

La ley de balance de la cantidad de movimiento establece (no es demostrable) la validez de la segunda ley de Newton en sistemas continuos, es decir, que para toda región material $\mathcal{P}_t = \varphi_t(\mathcal{P}_{ref})$

$$\mathbf{F}_{ext}(\mathcal{P}_t) = \dot{\mathbf{L}}(\mathcal{P}_t) . \quad (4.34)$$

Empleando el resultado (4.23) y las definiciones (4.4) y (4.31), obtenemos la expresión integral del balance de la cantidad de movimiento

$$\int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial\mathcal{P}_{ref}} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) dA , \quad (4.35)$$

en su forma lagrangiana, siendo $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{X}, t)$. De forma similar, la forma euleriana de esta ley de balance es:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da, \quad (4.36)$$

donde la $\mathbf{a} = \mathbf{A} \circ \varphi_t^{-1} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ es la aceleración espacial.

4.4.2. Expresión diferencial euleriana del balance de cantidad de movimiento

De la misma manera que la ley de conservación de masa, la ley de balance de la cantidad de movimiento se puede formular para volúmenes diferenciales sin más que emplear alguna relación del cálculo integral de tensores. Para obtener la expresión euleriana diferencial, recordamos del capítulo 3 que la fuerza por unidad de superficie que se ejerce sobre una parte cualquiera de un medio continuo es

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad (4.37)$$

siendo $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones de Cauchy. Empleando esta última expresión y el teorema de la divergencia podemos transformar la integral de superficie de las fuerzas externas sobre \mathcal{P}_t en una integral de volumen:

$$\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) da = \int_{\mathcal{P}_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) dv. \quad (4.38)$$

Por lo tanto, para cualquier parte material \mathcal{P}_t del medio continuo, la expresión euleriana integral del balance de cantidad de movimiento se puede expresar como:

$$\int_{\mathcal{P}_t} (\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) dv = \mathbf{0}. \quad (4.39)$$

Como esta última expresión se anula para cualquier región material, el integrando ha de ser cero y concluimos

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t). \quad (4.40)$$

4.4.3. Expresión diferencial lagrangiana del balance de cantidad de movimiento

En numerosas ocasiones, fundamentalmente relacionadas con el tratamiento y formulación de problemas relacionados con cuerpos sólidos, resulta práctico emplear una formulación lagrangiana de la ley de balance de cantidad de movimiento. Esta formulación, que se presenta a continuación, permite expresar la relación de equilibrio en función de cantidades, tensoriales y vectoriales, que dependen de las coordenadas materiales $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_{ref}$

y que tienen una interpretación geométrica relacionada con la configuración de referencia del sólido.

Recordemos del capítulo 3 el concepto del primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, representado con el símbolo \mathbf{P} , que verifica

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, da = \mathbf{P} \mathbf{N} \, dA . \quad (4.41)$$

Para obtener la expresión diferencial lagrangiana del balance de cantidad de movimiento transformamos las integrales que aparecen en

$$\int_{\partial \mathcal{P}_{ref}} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \, dA = \int_{\partial \mathcal{P}_{ref}} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}(\mathbf{X}) \, dA = \int_{\mathcal{P}_{ref}} \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \, dV . \quad (4.42)$$

resultando en

$$\int_{\mathcal{P}_{ref}} (\rho_{ref}(\mathbf{X}) \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) - \rho_{ref}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)) \, dV = \mathbf{0} . \quad (4.43)$$

Puesto que la integral se anula para cualquier región material, el integrando ha de anularse también y se puede concluir

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) + \rho_{ref}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = \rho_{ref}(\mathbf{X}) \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \quad (4.44)$$

4.5. Balance de momento cinético

La ley de balance del momento cinético expresa que en un sistema mecánico el momento respecto de un punto fijo de las fuerzas externas es igual al cambio del momento cinético del mismo. En esta sección estudiamos las consecuencias de aplicar este principio a la dinámica de los medios continuos.

En primer lugar escribimos el momento cinético de un medio continuo como la suma (integral) del momento cinético de cada diferencial de volumen que lo forma. De esta manera, para cualquier región material $\mathcal{P}_t = \varphi(\mathcal{P}_{ref})$,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}, t) \times \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \, dV . \end{aligned} \quad (4.45)$$

El momento de las fuerzas exteriores sobre la región \mathcal{P}_t , que llamaremos \mathbf{M}_{ext} , también se puede expresar de forma euleriana o lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ext}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \, dv + \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \, da \\ &= \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \varphi(\mathbf{X}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) \, dV \\ &\quad + \int_{\partial \mathcal{P}_{ref}} \varphi(\mathbf{X}, t) \times \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \, dA . \end{aligned} \quad (4.46)$$

▷ **Ejemplo 4.5.1.** Demostrar que las expresiones lagrangianas y eulerianas del momento cinético y del momento de las fuerzas exteriores son equivalentes. ◁

4.5.1. Expresión integral del balance del momento cinético

La ley del balance del momento cinético postula que el cambio temporal del momento cinético de un cuerpo es igual al momento, respecto de un punto fijo o el centro de gravedad, de las fuerzas que están aplicadas sobre este. Empleando la notación definida, esta ley se escribe de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{J}}(\mathcal{P}_t) = \mathbf{M}_{ext}(\mathcal{P}_t) . \quad (4.47)$$

La derivada temporal $\dot{\mathbf{J}}$ se puede desarrollar utilizando la expresión (4.45)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{J}}(\mathcal{P}_t) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \times \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t) dV \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) (\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \times \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)) dV \\ &= \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) (\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \times \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \times \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)) dV \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv . \end{aligned} \quad (4.48)$$

Por tanto, la expresión integral euleriana del balance del momento cinético queda:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da . \quad (4.49)$$

La expresión integral lagrangiana del balance de momento cinético se obtiene fácilmente a partir de la última expresión y resulta:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \times \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) dV &= \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) dV \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{P}_{ref}} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \times \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) dA . \end{aligned} \quad (4.50)$$

▷ **Ejemplo 4.5.2.** Demostrar que las expresiones (4.49) y (4.50) son equivalentes. ◁

4.5.2. Expresión diferencial del balance de momento cinético

Al igual que en el caso de las dos leyes de balance estudiadas anteriormente, la expresión integral del balance de momento cinético es fácil de obtener pero de utilidad limitada para la resolución de problemas. A continuación buscamos una expresión diferencial de (4.49) que, como veremos, es mucho más compacta, y de gran utilidad.

Para poder encontrar la expresión diferencial de (4.49) se necesita un resultado que se demostró en el Capítulo 1, a saber,

$$\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) da = \int_{\mathcal{P}_t} (\mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + 2\text{axial}[\boldsymbol{\sigma}^a]) dv . \quad (4.51)$$

Para encontrar la expresión diferencial del balance de momento cinético reescribimos la ecuación (4.49) como:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times (\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) dv = \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) da . \quad (4.52)$$

El lado de la izquierda se puede transformar empleando la ley del balance de cantidad de movimiento:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times (\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) dv = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) dv . \quad (4.53)$$

El lado de la derecha de (4.53) se puede transformar utilizando el resultado (4.51). Igualando estas dos ecuaciones transformadas se obtiene

$$\int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}_t} \mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\mathcal{P}_t} 2\text{axial}[\boldsymbol{\sigma}^a] . \quad (4.54)$$

Puesto que esta última expresión se cumple para cualquier región material \mathcal{P}_t , se debe verificar que $\text{axial}[\boldsymbol{\sigma}^a] = \mathbf{0}$, por lo que la parte hemisimétrica de $\boldsymbol{\sigma}$ debe de ser nula o que

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T . \quad (4.55)$$

Esta relación obtenida es la expresión euleriana diferencial de la ley de balance del momento cinético. Es inmediato comprobar que a partir de esta expresión y de la definición del tensor de Piola-Kirchhoff, la expresión lagrangiana diferencial de este mismo principio ha de ser:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)\mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)^T . \quad (4.56)$$

4.6. Balance de energía

En este apartado se tratan por primera vez en el curso aspectos de los medios continuos que no son puramente mecánicos. Se abordan, en particular, cuestiones relacionadas con la transformación de la energía mediante procesos mecánicos y térmicos, y su relación con el primer principio de la termodinámica.

Recordamos, en primer lugar, el concepto de potencia, definido de forma genérica como el trabajo realizado por unidad de tiempo. En el contexto de los medios continuos consideramos \mathcal{P}_t una región material cualquiera. Se define la **potencia mecánica** P_{ext} que se realiza sobre ella como el trabajo por unidad de tiempo que efectúan las fuerzas exteriores, es decir,

$$P_{ext}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, dv + \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, da . \quad (4.57)$$

4.6.1. El teorema de las fuerzas vivas

Cuando se aplica un trabajo exterior a un cuerpo continuo, éste se transforma en otras formas de energía. Sin entrar en los detalles sobre las posibles transformaciones termodinámicas, que ya se verán más adelante, se puede realizar un sencillo balance energético simplemente a partir de la ecuación del balance de cantidad de movimiento. En primer lugar definimos la **energía cinética** K de una región material cualquiera \mathcal{P}_t a partir de la energía de cada una de sus partes diferenciales:

$$K(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}, t) |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|^2 \, dv , \quad (4.58)$$

y también definimos un tipo de potencia llamado **potencia tensional** y que tiene la expresión

$$P_{ten}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) \, dv , \quad (4.59)$$

siendo $\mathbf{d} = \text{sim}[\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}]$, la tasa de deformación.

Teorema 4.6.1. *La potencia exterior que se aplica sobre un volumen material cualquiera \mathcal{P}_t de un cuerpo continuo se invierte en incrementar su energía cinética y en potencia tensional, es decir,*

$$P_{ext}(\mathcal{P}_t) = \dot{K}(\mathcal{P}_t) + P_{ten}(\mathcal{P}_t) . \quad (4.60)$$

Demostración. En esta demostración no aparecen, por simplificar, los argumentos de todas los campos que se utilizan. Para probar el teorema empleamos la siguiente identidad tensorial, que resulta del teorema de la divergencia

y del balance de la cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da &= \int_{\partial\mathcal{P}_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} : \mathbf{v} \, da \\
&= \int_{\partial\mathcal{P}_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} : \mathbf{n} \, da \\
&= \int_{\mathcal{P}_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) \, dv \\
&= \int_{\mathcal{P}_t} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}) \, dv \\
&= \int_{\mathcal{P}_t} ((\rho \mathbf{a} - \rho \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}) \, dv .
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Utilizando esta identidad en la definición de la potencia externa se obtiene:

$$\begin{aligned}
P_{ext}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} (\rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}) \, dv \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_t} \frac{\rho}{2} |\mathbf{v}|^2 \, dv + P_{ten}(\mathcal{P}_t) \\
&= \dot{K}(\mathcal{P}_t) + P_{ten}(\mathcal{P}_t) .
\end{aligned} \tag{4.62}$$

□

El teorema de las fuerzas vivas no es un resultado termodinámico sino puramente mecánico. De forma simplificada considera que la energía aportada a un cuerpo continuo o bien se transforma en incrementar/disminuir la energía de su movimiento global (la energía cinética) o bien se transforma “en otra cosa”, la potencia tensional. Los efectos termodinámicos aparecen cuando se intenta comprender con más detalle el contenido de la potencia tensional. Nótese que en un cuerpo rígido, la tasa de deformación \mathbf{d} es nula con lo cual toda la potencia exterior aplicada ha de transformarse en cambiar su energía cinética.

4.6.2. Expresión lagrangiana del teorema de las fuerzas vivas

Como en todos los desarrollos anteriores, el teorema de las fuerzas vivas se puede expresar, de forma completamente equivalente, empleando campos lagrangianos. Para ello, basta con reformular los diversos tipos de energía y

potencia que se han definido anteriormente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 P_{ext}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_{ref}} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \, dA, \\
 K(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_{ref}} \frac{1}{2} \rho_{ref}(\mathbf{X}, t) |\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)|^2 \, dV, \\
 P_{ten}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_{ref}} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) \, dV.
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

La equivalencia de las tres formas de potencia se con sus respectivas expresiones Eulerianas se deja como ejercicio.

▷ **Ejemplo 4.6.2.** Demostrar que la potencia tensional también se puede expresar de la siguiente manera:

$$P_{ten}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_{ref}} \mathbf{S}(\mathbf{X}, t) : \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, t) \, dV, \tag{4.64}$$

siendo \mathbf{S} el segundo tensor de Piola-Kirchhoff y \mathbf{E} el tensor de deformación de Green-lagrange.

Para demostrar la identidad basta con notar que

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\mathbf{S} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \text{sim}[\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}] = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}. \tag{4.65}$$

◁

4.6.3. El primer principio de la termodinámica

El primer principio de la termodinámica postula que la energía no se crea ni se destruye, sino que únicamente se transforma. En esta sección estudiamos las posibles transformaciones entre energía mecánica y térmica de los cuerpos continuos.

Antes de estudiar sus posibles transformaciones energéticas definimos la **potencia térmica** o **calorífica** suministrada a una región \mathcal{P}_t material de un cuerpo continuo como la cantidad:

$$P_{cal}(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) \, dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} h(\mathbf{x}, t) \, da. \tag{4.66}$$

En esta expresión, r es la tasa de calor suministrado o generado por unidad de masa y tiempo en el medio continuo. Este calor puede tener origen químico, radioactivo, etc. De forma similar, h es la tasa de calor que entra por unidad de área y tiempo, a través de su contorno, en la región material. El vector **flujo de calor**, por unidad de área y tiempo es \mathbf{q} de forma que

$$h(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}). \tag{4.67}$$

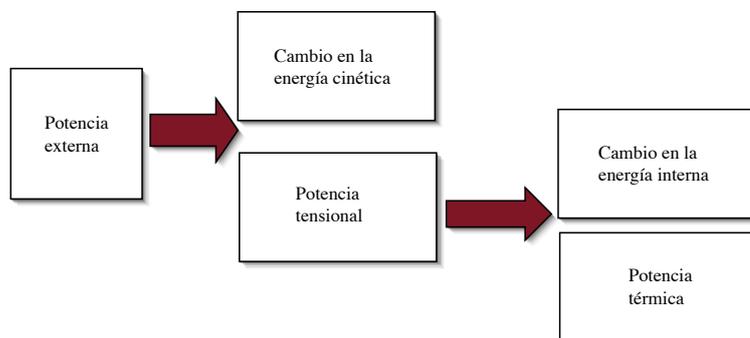


Figura 4.2: Esquema de la transformación de la energía. La flecha de la izquierda es resultado del teorema de las fuerzas vivas. La flecha de la derecha es debida al primer principio de la termodinámica.

Usando este último vector, la potencia térmica se puede expresar de forma equivalente como:

$$\begin{aligned}
 P_{cal}(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) dv - \int_{\partial\mathcal{P}_t} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) da \\
 &= \int_{\mathcal{P}_t} (\rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) dv .
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

El primer principio de la termodinámica, enunciado cualitativamente anteriormente, se puede expresar ahora de forma más precisa. Para cualquier región material \mathcal{P}_t , existe una función E llamada **energía**, que depende únicamente del estado de dicha región, tal que su variación en el tiempo es igual a la suma de la potencia exterior y calorífica suministradas a dicha región. De forma matemática:

$$\dot{E}(\mathcal{P}_t) = P_{ext}(\mathcal{P}_t) + P_{cal}(\mathcal{P}_t) . \tag{4.69}$$

El primer principio de la termodinámica también postula la existencia de una cantidad intensiva y de estado, la **energía interna** U definida a partir de la integral

$$U(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t) dv , \tag{4.70}$$

tal que la energía total de una región material \mathcal{P}_t se pueda expresar como la suma de la energía interna y la cinética:

$$E(\mathcal{P}_t) = K(\mathcal{P}_t) + U(\mathcal{P}_t) . \tag{4.71}$$

Utilizando el teorema de las fuerzas vivas (4.60) y la expresión (4.69), la ecuación anterior se puede escribir también de la siguiente manera:

$$\dot{E}(\mathcal{P}_t) = \dot{K}(\mathcal{P}_t) + \dot{U}(\mathcal{P}_t) = \dot{K}(\mathcal{P}_t) + P_{ten}(\mathcal{P}_t) + P_{cal}(\mathcal{P}_t) , \tag{4.72}$$

y simplificando,

$$\dot{U}(\mathcal{P}_t) = P_{ten}(\mathcal{P}_t) + P_{cal}(\mathcal{P}_t) . \quad (4.73)$$

Esta última expresión indica que el cambio en energía interna de una región en un cuerpo continuo se debe a la potencia tensional aplicada sobre él y a la potencia térmica suministrada. También se puede entender, por tanto, que la potencia tensional que se aplica a un cuerpo se puede transformar en incrementar la energía interna del mismo o convertirse en energía térmica, que sale del mismo (por ello el signo negativo):

$$P_{ten}(\mathcal{P}_t) = \dot{U}(\mathcal{P}_t) - P_{cal}(\mathcal{P}_t) . \quad (4.74)$$

La expresión (4.73) se puede expresar integralmente como:

$$\int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{Du}{Dt}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{P}_t} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)] dv . \quad (4.75)$$

Como dicha expresión ha de cumplirse para cualquier región \mathcal{P}_t , también ha de verificarse a nivel diferencial, es decir,

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho r - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q} \quad (4.76)$$

que no es sino la expresión Euleriana del primer principio de termodinámica en medios continuos. Esta relación cuantifica el cambio de la densidad de energía interna como la suma de tres contribuciones: el calor aportado, el balance neto del flujo de calor y la potencia recibida por el trabajo mecánico de las tensiones proyectadas la tasa de deformación.

Como todas las leyes de balance estudiadas hasta el momento, la ecuación (4.76) tiene su contrapartida lagrangiana. Para encontrarla, definimos el calor aportado por unidad de masa en la configuración de referencia, que denominamos R , y el flujo de calor por unidad de área, también en la configuración de referencia, que lo llamamos \mathbf{Q} . Estas dos campos se definen de manera que se verifica

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) r(\mathbf{x}, t) dv &= \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) R(\mathbf{X}, t) dV , \\ \int_{\partial \mathcal{P}_t} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} da &= \int_{\partial \mathcal{P}_{ref}} \mathbf{Q}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N} dA . \end{aligned} \quad (4.77)$$

Utilizando las expresiones de la transformación de volumen y área concluimos que

$$R = r \circ \boldsymbol{\varphi}_t , \quad \mathbf{Q} = J\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{q} \circ \boldsymbol{\varphi}_t) . \quad (4.78)$$

De manera análoga, la densidad de energía interna por unidad de volumen en la configuración de referencia la llamamos U , esta verifica

$$U = u \circ \boldsymbol{\varphi}_t . \quad (4.79)$$

Expresando la potencia tensional con campos tensoriales lagrangianos la forma integral lagrangiana del primer principio de la termodinámica adopta la expresión

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \dot{U}(\mathbf{X}, t) dV &= \int_{\mathcal{P}_{ref}} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) : \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) dV \\ &+ \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) R(\mathbf{X}, t) dV - \int_{\partial\mathcal{P}_{ref}} \mathbf{Q}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N} dA . \end{aligned} \quad (4.80)$$

Finalmente, empleando el teorema de la divergencia en el término del calor se sigue que

$$\rho_{ref} \dot{U} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \rho_{ref} R - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q} , \quad (4.81)$$

que es la expresión lagrangiana del balance de energía.

4.7. La segunda ley de la termodinámica

El primer principio de la termodinámica enunciado en la sección anterior explica el balance energético en procesos de cuerpos continuos que incluyen efectos térmicos y dinámicos. Sin embargo este principio no proporciona información alguna sobre la posibilidad de que un determinado proceso ocurra o no. Este dato lo proporciona el segundo principio de la termodinámica.

4.7.1. Formulaciones integrales

El segundo principio de la termodinámica postula lo siguiente:

- a) Existe una función de estado intensiva θ , llamada la **temperatura absoluta** cuyo valor es siempre positivo y es únicamente función de la **temperatura empírica**, esto es, la que podemos medir con un termómetro, en una escala cualquiera.
- b) Existe otra función de estado, llamada **entropía** y designada con el símbolo Ξ con las siguientes propiedades:
 - Es una función extensiva, es decir, que la entropía Σ de una región material $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_t^1 \cup \mathcal{P}_t^2$, con $\mathcal{P}_t^1 \cap \mathcal{P}_t^2 = \emptyset$ es la suma de la entropía de sus partes \mathcal{P}_t^1 y \mathcal{P}_t^2 . A partir de la entropía total se puede definir una entropía específica s , es decir, por unidad de masa en la configuración deformada, con lo que se tiene

$$\Sigma(\mathcal{P}_t) = \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) s(\mathbf{x}, t) dv . \quad (4.82)$$

- Se define la entropía generada en la región \mathcal{P}_t por unidad de tiempo como

$$\Xi(\mathcal{P}_t) = \dot{\Sigma}(\mathcal{P}_t) - \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{r(\mathbf{x}, t)}{\theta(\mathbf{x}, t)} dv + \int_{\partial\mathcal{P}_t} \frac{\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{\theta(\mathbf{x}, t)} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) da . \quad (4.83)$$

En todo proceso físico se cumple que la producción de entropía es no negativo, es decir,

$$\Xi(\mathcal{P}_t) \geq 0 . \quad (4.84)$$

Cuando en un proceso la producción de entropía es nula, el proceso es reversible. Cuando es positiva, el proceso es irreversible. Un proceso con disminución de entropía no se puede dar.

La desigualdad (4.84) es la expresión euleriana de la **desigualdad de Clausius-Duhem** y es la forma de la segunda ley de la termodinámica que más se emplea en Mecánica de Medios Continuos.

Para encontrar la expresión integral lagrangiana del segundo principio definimos

$$S = s \circ \varphi_t , \quad \Theta = \theta \circ \varphi_t , R = r \circ \varphi_t , \quad (4.85)$$

con lo que la entropía generada en la región \mathcal{P}_t por unidad de tiempo se puede expresar como

$$\Xi(\mathcal{P}_t) = \dot{\Sigma}_{ref}(\mathcal{P}_{ref}) - \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \frac{R(\mathbf{X}, t)}{\Theta(\mathbf{X}, t)} dV + \int_{\partial\mathcal{P}_{ref}} \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)}{\Theta(\mathbf{X}, t)} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{X}) dA , \quad (4.86)$$

siendo

$$\Sigma_{ref}(\mathcal{P}_{ref}) = \int_{\mathcal{P}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) S(\mathbf{X}, t) dV . \quad (4.87)$$

4.7.2. Formulaciones locales

Para establecer una expresión diferencial del segundo principio de la termodinámica transformamos la integral (4.83) empleando el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} \Xi(\mathcal{P}_t) &= \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{Ds}{Dt}(\mathbf{x}, t) dv - \int_{\mathcal{P}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{r(\mathbf{x}, t)}{\theta(\mathbf{x}, t)} dv + \int_{\mathcal{P}_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{\theta(\mathbf{x}, t)} dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \left[\rho(\mathbf{x}, t) \frac{Ds}{Dt}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t) \frac{r(\mathbf{x}, t)}{\theta(\mathbf{x}, t)} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{\theta(\mathbf{x}, t)} \right] dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \left[\rho(\mathbf{x}, t) \frac{Ds}{Dt}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t) \frac{r(\mathbf{x}, t)}{\theta(\mathbf{x}, t)} + \frac{\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{\theta(\mathbf{x}, t)} - \frac{\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)}{\theta^2(\mathbf{x}, t)} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta(\mathbf{x}, t) \right] dv \\ &= \int_{\mathcal{P}_t} \gamma(\mathbf{x}, t) dv , \end{aligned} \quad (4.88)$$

siendo

$$\gamma = \rho \frac{Ds}{Dt} - \rho \frac{r}{\theta} + \frac{\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}}{\theta} - \frac{\mathbf{q}}{\theta^2} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \quad (4.89)$$

la **densidad de producción entrópica** por unidad de volumen en la configuración deformada. Como la integral (4.88) ha de ser negativa para cualquier región \mathcal{P}_t , también lo ha de ser su integrando y por tanto la desigualdad de Clausius-Duhem se puede escribir en forma local como

$$\gamma \geq 0 . \quad (4.90)$$

Para continuar definimos dos tipos de producción de entropía. El primero es la producción local de entropía específica γ_{loc} y definida como:

$$\gamma_{loc} = \rho \frac{Ds}{Dt} - \rho \frac{r}{\theta} + \frac{\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}}{\theta} . \quad (4.91)$$

La segunda es la producción de entropía específica por conducción térmica γ_{con} :

$$\gamma_{con} = -\frac{\mathbf{q}}{\theta^2} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta . \quad (4.92)$$

Empleando estas dos definiciones el segundo principio de la termodinámica se pueda expresar como:

$$\gamma_{loc} + \gamma_{con} \geq 0 . \quad (4.93)$$

La **desigualdad de Clausius-Planck** establece que tanto γ_{loc} como γ_{con} han de ser no negativas, es decir

$$\gamma_{loc} \geq 0 , \quad \gamma_{con} \geq 0 . \quad (4.94)$$

Evidentemente, la desigualdad de Clausius-Planck implica la desigualdad de Clausius-Duhem.

Un corolario de la desigualdad de Clausius-Planck es el siguiente. Como la entropía específica producida por conducción ha de ser no negativa se tiene que

$$\gamma_{con} = -\frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \geq 0 . \quad (4.95)$$

Puesto que la temperatura absoluta es estrictamente positiva, de la anterior ecuación se deduce que

$$-\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta \geq 0 , \quad (4.96)$$

es decir, que el flujo de calor siempre ha de ser en la dirección opuesta al gradiente de temperatura. En particular, si se acepta la ley de Fourier que establece $\mathbf{q} = -\kappa \nabla_{\mathbf{x}} \theta$, entonces se deduce que la conductividad κ ha de ser positiva.

La condición $\gamma_{loc} \geq 0$ sirve para descartar modelos constitutivos, tanto de sólidos como de fluidos, que violan la segunda ley de la termodinámica.

Como se puede comprobar en textos de termodinámica, al final un modelo constitutivo consiste en una expresión de la entropía u otro potencial como funciones de las variables de estado del material (deformación, energía, temperatura, etc.). Cuando se proponen modelos es necesario comprobar que, para cualquier proceso (con aporte de calor o sin él, con deformación de cualquier tipo) la condición $\gamma_{loc} \geq 0$ *siempre* se verifica.

La expresión diferencial lagrangiana del segundo principio de la termodinámica se obtiene, como en el caso euleriano, transformando la expresión de la generación de entropía Ξ en una integral sobre la configuración de referencia de cualquier region material y concluyendo que el integrando ha de ser no negativo. El resultado final es que la tasa de producción de entropía por unidad de volumen de la configuración de referencia es

$$\Gamma = \rho_{ref} \dot{S} - \rho_{ref} \frac{R}{\Theta} + \frac{\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q}}{\Theta} - \frac{\mathbf{Q}}{\Theta^2} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \Theta, \quad (4.97)$$

y la desigualdad de Clausius-Duhem es

$$\Gamma \geq 0. \quad (4.98)$$

De la misma manera, la producción de entropía Γ se puede separar en un contribución interna y otra de conducción, definidas respectivamente como

$$\Gamma_{int} = \rho_{ref} \dot{S} - \rho_{ref} \frac{R}{\Theta} + \frac{\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q}}{\Theta}, \quad \Gamma_{con} = -\frac{\mathbf{Q}}{\Theta^2} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \Theta, \quad (4.99)$$

por lo que la desigualdad de Clausius-Plank se podría escribir también como

$$\Gamma_{int} \geq 0, \quad \Gamma_{con} \geq 0. \quad (4.100)$$

Resumen de fórmulas importantes

Expresiones lagrangianas:

Conservación de masa	$\rho_{ref} = J(\rho \circ \varphi_t)$
Cons. de la cantidad de movimiento	$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \rho_{ref} \mathbf{B} = \rho_{ref} \mathbf{A}$
Conservación del momento cinético	$\mathbf{P} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{P}^T$
Deformación isocórica	$J = 1$
Conservación de la energía	$\rho_{ref} \dot{U} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \rho_{ref} R - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q}$
Generación local de entropía	$\Gamma_{loc} = \rho_{ref} \dot{S} - \rho_{ref} \frac{R}{\Theta} + \frac{\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q}}{\Theta}$
Gen. de entropía por conducción	$\Gamma_{con} = -\frac{\mathbf{Q}}{\Theta^2} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \Theta$
Desigualdad de Clausius-Duhem	$\Gamma = \Gamma_{loc} + \Gamma_{con} \geq 0$
Desigualdad de Clausius-Planck	$\Gamma_{loc} \geq 0 \quad \Gamma_{con} \geq 0$

Expresiones eulerianas:

Conservación de masa	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$
Cons. de la cantidad de movimiento	$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a}$
Conservación del momento cinético	$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$
Deformación isocórica	$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0$
Conservación de la energía	$\rho \frac{Du}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho r - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}$
Generación local de entropía	$\gamma_{loc} = \rho \frac{Ds}{Dt} - \rho \frac{r}{\theta} + \frac{\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{q}}{\theta}$
Gen. de entropía por conducción	$\gamma_{con} = -\frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \theta$
Desigualdad de Clausius-Duhem	$\gamma = \gamma_{loc} + \gamma_{con} \geq 0$
Desigualdad de Clausius-Planck	$\gamma_{loc} \geq 0 \quad \gamma_{con} \geq 0$

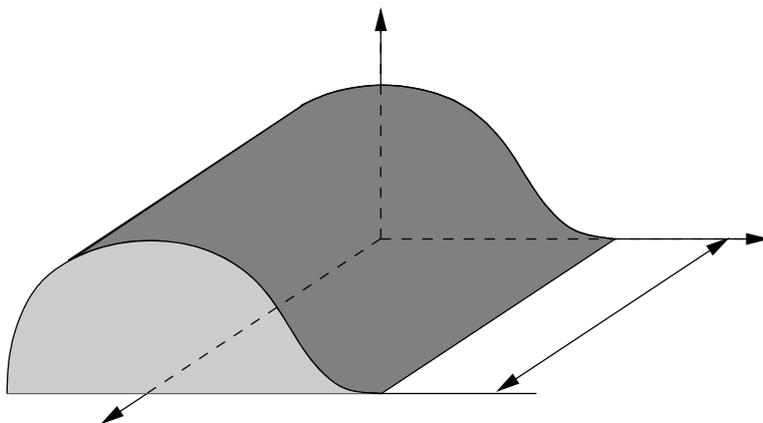


Figura 4.3: Superficie para el problema 4.2.

Problemas

Problema 4.1. a) Demostrar que el campo de velocidades $\mathbf{v} = A\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$, siendo A una constante arbitraria, satisface la ecuación de continuidad de un flujo incompresible.

b) En un determinado punto de un cuerpo los tensores de tasa de deformación y tensión tienen, respectivamente, las expresiones matriciales

$$[\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} [\text{s}^{-1}] \quad \text{y} \quad [\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ -1 & 7 & 8 \end{bmatrix} [\text{N} \cdot \text{m}^{-2}]. \quad (4.101)$$

Obtener el valor de la potencia tensional específica (por unidad de volumen) en ese punto.

c) Un fluido perfecto está caracterizado por la ecuación constitutiva $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$, siendo p la presión. Demostrar que la potencia tensional específica puede expresarse como $\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$, siendo ρ la densidad.

Problema 4.2. Sea un fluido con velocidad espacial $\mathbf{v}(x, y, z, t) = f(x, y)z \mathbf{k}$ y $f > 0$. Se pide:

a) Sabiendo que la densidad inicial del fluido es igual a $f(x, y)$, comprobar que ésta tiene por expresión

$$\rho(x, y, z, t) = f(x, y) e^{-f(x, y)t}.$$

b) Comprobar que la deformación es

$$\boldsymbol{\varphi}_t(X, Y, Z) = (x, y, z) = (X, Y, Z e^{f(X, Y)t}).$$

- c) Si el fluido tiene dos especies, una de ellas contenida inicialmente en una esfera de radio R , obtener la ecuación de superficie que contiene a este fluido a lo largo del tiempo.
- d) Calcular la cantidad de masa por unidad de tiempo que atraviesa la superficie cilíndrica de la figura 4.3, cuya directriz tiene longitud L y es perpendicular al plano xy .

Problema 4.3. a) Demostrar que un fluido cuyo campo de velocidad espacial es

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{3x_2}{x_1^2 + x_2^2} \mathbf{e}_1 - \frac{3x_1}{x_1^2 + x_2^2} \mathbf{e}_2 \quad (4.102)$$

es incompresible.

- b) Calcular la aceleración espacial correspondiente al campo de velocidades (4.102) y el flujo, en todo instante, que atraviesa una superficie esférica centrada en el origen y con radio unidad.
- c) Se considera ahora un fluido *incompresible* con ecuación constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = -\pi \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{d}, \quad (4.103)$$

En esta ecuación π es una función escalar, $\mu > 0$ es una viscosidad y $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}}^T\mathbf{v})$. A partir del teorema de las fuerzas vivas, demostrar que si la potencia exterior aplicada P_{ext} es nula, el valor de la energía cinética K de este fluido no puede crecer en el tiempo.

Problema 4.4. Un medio continuo tiene densidad de referencia $\rho_{ref} = 1$ y experimenta una deformación descrita por la aplicación

$$(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{\varphi}(X_1, X_2, X_3, t) = (X_1 + tX_2, X_2 + t^2X_3, tX_1 + X_3),$$

donde X_i, x_j son las coordenadas cartesianas de los puntos en las configuraciones de referencia y actual, respectivamente.

- a) Calcular el gradiente de deformación \mathbf{F} y el jacobiano J .
- b) Calcular la aceleración material y la espacial.
- c) Si el tensor de Cauchy tiene por expresión en la base de la configuración actual

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 2x_1^2 & 0 & x_1x_3 \\ 0 & x_2^2 & 0 \\ x_1x_3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

encontrar el campo (espacial) de fuerzas volumétricas \mathbf{b} que hace que el sistema esté en equilibrio.

Problema 4.5. Un cilindro tiene una sección A y está lleno de un gas de densidad ρ_0 . Cerrando el cilindro se encuentra un pistón, inicialmente a una distancia h_0 de la base del cilindro que se mueve, incrementando el volumen de la cavidad según una función conocida $h(t)$. Suponiendo que el pistón se mueve tan lentamente que la densidad es homogénea, calcular la velocidad del gas en cada punto.

Problema 4.6. Se sabe que en un sólido la energía interna es únicamente función de la deformación \mathbf{F} y de la entropía S . Combinando la desigualdad de Clausius-Planck y la ley del balance de energía demostrar que, como la primera debe de ser cierta para cualquier proceso, es decir, para cualquier valor de \dot{S} y $\dot{\mathbf{F}}$, entonces

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad \mathbf{P} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{F}}.$$

Problema 4.7. A un cuerpo deformable se le aporta una cantidad de masa $s(\mathbf{x}, t)$ por unidad de masa y tiempo en su configuración deformada. Si la deformación se indica como φ_t ,

- Indica la expresión integral del balance de masa de una región material cualquiera \mathcal{P}_t teniendo en cuenta el aporte s .
- Encuentra la expresión diferencial euleriana de la ecuación de balance de masa (nota: $\dot{J} = J(\nabla_x \cdot \mathbf{v}) \circ \varphi_t$).
- Demuestra que la expresión diferencial lagrangiana de la ecuación de balance de masa es

$$\frac{\partial \rho_{ref}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = \rho_{ref}(\mathbf{X}, t) S(\mathbf{X}, t),$$

con $\rho_{ref} = J(\rho \circ \varphi_t)$ y $S = s \circ \varphi_t$.

- Concluye que se verifica

$$(\rho \circ \varphi_t)(\mathbf{X}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{J(\mathbf{X}, t)} \exp \left[\int_0^t S(\mathbf{X}, \tau) \, d\tau \right]$$

siendo ρ_0 la distribución inicial de densidad en el cuerpo.

Problema 4.8. Un cuerpo tiene un campo de velocidad espacial

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = (ay - bz) \mathbf{i} + (cz - ax) \mathbf{j} + (bx - cy) \mathbf{k}$$

siendo a, b, c tres constantes, x, y, z las coordenadas cartesianas y $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ sus vectores de la base.

Demostrar:

- a) Que la deformación es isocórica (incompresible).

- b) Que la potencia tensional sobre cualquier región material es nula.
- c) Si la tensión de Cauchy en cualquier punto es $\boldsymbol{\sigma}(x, y, z, t) = -p(x, y, z, t) \mathbf{I}$, siendo p un campo escalar, calcular las fuerzas por unidad de masa $\mathbf{b}(x, y, z, t)$ en función de los datos y la densidad espacial.

Bibliografía

- [1] M. E. Gurtin, E. Fried, and L. Anand. *The mechanics and thermodynamics of continua*. Cambridge University Press, New York, USA, 2010. ISBN 9781139482158.
- [2] M. Šilhavý. *The mechanics and thermodynamics of continuous media*. 1997.
- [3] K. Wilmanski. *Thermomechanics of continua*. 1998.

Capítulo 5

Modelos constitutivos

La descripción cinemática de los medios continuos, explicada en el capítulo 2, y sus leyes de balance, descritas en el capítulo 4, son válidas para todo cuerpo continuo. Más aún, las ecuaciones correspondientes son idénticas en todos los casos: la ecuación de balance de cantidad de movimiento siempre es la misma, la definición del tensor de deformación de Green-Lagrange es común para todos los cuerpos, etc.

Sin embargo, la experiencia nos indica que los cuerpos responden de manera muy distinta ante los mismos estímulos. Por ejemplo, ante una distribución de fuerzas un bloque de acero y otro de madera se comportan de manera distinta, y distinta a su vez de un volumen idéntico de agua. Puesto que estas diferencias no aparecen ni en la descripción cinemática ni en las ecuaciones de balance deben de aparecer en algún otro lado. Este lugar son las llamadas *ecuaciones constitutivas*, que establecen una relación funcional entre la tensión aplicada y la deformación resultante, y que son el objeto del presente capítulo.

Si consideramos por un momento una deformación cualquiera de un sólido tridimensional el número de funciones que aparecen para la descripción de su cinemática y su comportamiento mecánico (ignoramos efectos térmicos) son quince. Tres son las componentes de la deformación, seis del tensor de deformaciones y seis del tensor de tensiones de Cauchy. La definición del tensor de deformación proporciona seis ecuaciones y la ley del balance de la cantidad de movimiento otras tres. En total tenemos quince funciones incógnita y nueve ecuaciones que éstas deben de cumplir. Para que el sistema tenga solución hacen falta seis ecuaciones más, que son las que proporciona el modelo constitutivo. Con él, el número de incógnitas y el de ecuaciones es el mismo y así cabe la esperanza de que el problema mecánico tenga solución y de que la podamos encontrar.

El objetivo de este capítulo es describir, de forma general, las relaciones constitutivas de sólidos y fluidos. Como veremos más adelante, no todas las ecuaciones que relacionan deformación con tensión pueden ser una relación

constitutiva, pues estas han de ser razonables. Qué se entiende por una relación “razonable” es un problema que aún no se ha resuelto completamente, sin embargo sí que se conoce alguna propiedad que debe de cumplirse y que explicaremos. De entre ellas la más importante es la objetividad material o principio de invariancia respecto a cambios de observador.

5.1. Principios generales de los modelos constitutivos

Como se indicaba en la introducción, no se puede definir cualquier relación funcional entre la tensión y la deformación y esperar que ésta represente una relación constitutiva válida. La determinación de las restricciones que debe de satisfacer una relación constitutiva un problema no totalmente resuelto en mecánica de materiales (véase [1]).

Aunque el problema no esté resuelto completamente se conocen algunos principios muy elementales que debe de satisfacer cualquier relación constitutiva. Estos son:

- El principio de determinismo.
- El principio de acción local.
- El principio de la memoria limitada.
- El principio de invariancia.

A continuación se explican los tres primeros y el último, por su importancia, se tratará en la sección siguiente.

El principio de determinismo. Este principio establece que el estado de tensiones en un punto del cuerpo puede depender de la deformación actual y de las deformaciones pasadas, pero nunca de las deformaciones futuras.

El principio de acción local. Este segundo principio postula que el estado de tensión en un punto de un medio continuo depende de la deformación en un entorno, tan pequeño como se quiera, de dicho punto. Es decir, que la historia de deformación en un puntos alejados no influye en el valor de la tensión.

Matemáticamente, este principio establece que la tensión en un punto del cuerpo sólo puede depender de (la historia) de la deformación y sus derivadas en ese mismo punto. En el caso particular en el que la tensión es únicamente función de la primera derivada, es decir, del gradiente de deformación \mathbf{F} , se dice que el material es “simple”. Si depende, en general, de las n primeras derivadas de la deformación se dice que es un material “de grado n ”.

El principio de la memoria limitada. El siguiente principio refleja la experiencia cotidiana que nos indica que, aunque en teoría la tensión en un punto depende de toda la historia pasada de deformación, únicamente hace falta tener en cuenta la historia reciente. Más concretamente, este principio establece que el valor de la deformación en instantes muy remotos ha de tener menos influencia en la tensión actual que aquellos valores próximos en el tiempo.

5.2. El principio de invariancia

El principio de objetividad o de invariancia respecto a cambios de observador es uno de los más importantes de la Mecánica de Medios Continuos. Aunque a simple vista pueda parecer elemental, no es así, y su enunciado en su forma final tardó bastante en publicarse [1].

El principio en cuestión establece que las relaciones constitutivas deben de ser válidas para cualquier observador. Consideremos un observador que estudia el movimiento y deformación de un cuerpo. Para este observador la deformación del cuerpo se describe con una función $\varphi(\mathbf{X}, t)$ así como todas las cantidades cinemáticas que se derivan de ésta (gradiente de deformación, tensor de Cauchy-Green, deformaciones principales, etc.). La relación constitutiva determina que el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ que el observador puede medir verifica una ecuación de la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}[\varphi_t(\mathbf{X})] , \quad (5.1)$$

siendo \mathcal{F} un funcional cuya expresión dejamos de momento sin especificar. Si el observador está asociado a un sistema de referencia \mathcal{B} se puede escribir que las coordenadas de la deformación y del tensor de Cauchy son

$$\{\varphi_t\}_{\mathcal{B}} , \quad [\boldsymbol{\sigma}]_{\mathcal{B}} . \quad (5.2)$$

Supongamos ahora que existe un segundo observador que estudia también el movimiento y las tensiones del cuerpo. Aunque existen clases más generales de observadores, sólo vamos a considerar aquellos que preservan las distancias, ángulos e intervalos de tiempo. Cualquier punto \mathbf{x} del espacio tiene coordenadas según el sistema de referencia de este segundo observador, que llamamos \mathcal{B}^+ , iguales a

$$\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}^+} = [\mathbf{Q}(t)] \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{B}} + \{\mathbf{c}(t)\}_{\mathcal{B}^+} \quad (5.3)$$

donde $\mathbf{Q}(t)$ y $\mathbf{c}(t)$ son, respectivamente, una matriz de rotación y un vector, ambos función del tiempo. Por tanto, en este segundo sistema de referencia la deformación y el tensor de tensiones de Cauchy tienen una representación que es

$$\{\varphi_t\}_{\mathcal{B}^+} = [\mathbf{Q}(t)] \{\varphi_t\}_{\mathcal{B}} + \{\mathbf{c}(t)\}_{\mathcal{B}^+} \quad (5.4a)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\mathcal{B}^+} = [\mathbf{Q}(t)] [\boldsymbol{\sigma}]_{\mathcal{B}} [\mathbf{Q}(t)]^T . \quad (5.4b)$$

Esta última relación indica que tanto la deformación como el tensor de tensiones de Cauchy se pueden expresar en varios sistemas de coordenadas, pero sus componentes no pueden ser arbitrariamente distintas sino que están relacionadas con su valor en el sistema original \mathcal{B} .

El **principio de objetividad material** o de **invariancia respecto al observador** establece que si en un punto de un cuerpo el tensor de tensiones de Cauchy verifica la relación constitutiva

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\mathcal{B}} = \mathcal{F}[\{\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X})\}_{\mathcal{B}}], \quad (5.5)$$

entonces también ha de verificarse que

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\mathcal{B}^+} = \mathcal{F}[\{\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X})\}_{\mathcal{B}^+}], \quad (5.6)$$

o equivalentemente,

$$[\mathbf{Q}(t)][\boldsymbol{\sigma}]_{\mathcal{B}}[\mathbf{Q}(t)]^T = \mathcal{F}[[\mathbf{Q}(t)]\{\boldsymbol{\varphi}_t\}_{\mathcal{B}} + \{\mathbf{c}(t)\}_{\mathcal{B}^+}]. \quad (5.7)$$

Una forma alternativa de interpretar este principio se deriva de observar que $[\mathbf{Q}][\boldsymbol{\sigma}]_{\mathcal{B}}[\mathbf{Q}]^T$ y $[\mathbf{Q}]\{\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{B}} + \{\mathbf{c}\}_{\mathcal{B}^+}$ coinciden, respectivamente, con las componentes en la base \mathcal{B} del tensor $\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T$ y de la deformación $\mathbf{Q}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{c}$. Por ello, un enunciado *completamente equivalente* del **principio de objetividad material** o **invariancia respecto al observador** establece que si en un punto de un cuerpo el tensor de tensiones de Cauchy se obtiene a partir de una relación constitutiva de la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}[\boldsymbol{\varphi}_t], \quad (5.8)$$

entonces, dado un tensor ortogonal $\mathbf{Q}(t)$ y un vector $\mathbf{c}(t)$, ambos dependientes del tiempo pero arbitrarios, el movimiento

$$\boldsymbol{\varphi}_t^+(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}(t) \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X}) + \mathbf{c}(t) \quad (5.9)$$

debe de originar un campo de tensiones que se puede obtener mediante la relación

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathcal{F}[\boldsymbol{\varphi}_t^+], \quad (5.10)$$

y ha de satisfacer

$$\boldsymbol{\sigma}^+(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) \mathbf{Q}^+(t). \quad (5.11)$$

Se dice que los movimientos $\boldsymbol{\varphi}_t$ y $\boldsymbol{\varphi}_t^+$ relacionados mediante la expresión (5.9) son **equivalentes**. Expresado de manera concisa, el principio de objetividad indica que la respuesta material es la misma para todos los movimientos equivalentes.

A partir de esta descripción decimos que una relación constitutiva de la forma $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}[\boldsymbol{\varphi}_t]$ satisface el principio de la invariancia respecto al observador u objetividad si cuando se considera la tensión de Cauchy resultante

(mediante la relación constitutiva) a partir de una deformación φ_t^+ definida por (5.9) el tensor de tensiones de Cauchy que se obtiene, que lo llamamos σ^+ satisface la relación (5.11).

Los gradientes de deformación de las deformaciones φ_t y φ_t^+ son, respectivamente,:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}}\varphi_t(\mathbf{X}), \quad \mathbf{F}^+(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}}\varphi_t^+(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t). \quad (5.12)$$

Así pues, en el caso más sencillo de un modelo constitutivo de un material elástico simple, éste es invariante si cumple la relación

$$\mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)\mathbf{Q}(t)^T = \mathcal{F}[\mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)]. \quad (5.13)$$

Igual que hemos obtenido la expresión del gradiente de deformaciones para el movimiento φ_t se puede obtener también cualquier otro objeto de la cinemática. Por ejemplo, el tensor de Green-Lagrange en el segundo movimiento resulta:

$$\mathbf{E}^+ = \frac{1}{2}((\mathbf{F}^+)^T\mathbf{F}^+ - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}, \quad (5.14)$$

es decir, que el tensor de Green-Lagrange es el mismo para los dos movimientos considerados. Examinemos ahora las consecuencias que el principio de invariancia tiene en algunos modelos constitutivos.

- a) Considérese la ley constitutiva $\mathcal{F}[\varphi_t] = \mathbb{C} \nabla_{\mathbf{X}}\varphi_t(\mathbf{X})$, siendo \mathbb{C} un tensor constante de cuarto orden. Si el cuerpo se somete a una deformación $\varphi = \varphi(\mathbf{X}, t)$, un primer observador calcularía el tensor de tensiones de Cauchy como:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \mathbb{C} \nabla_{\mathbf{X}}\varphi_t(\mathbf{X}) = \mathbb{C} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t). \quad (5.15)$$

Un segundo observador que se mueve de forma que describe la deformación del cuerpo según (5.9), percibe la tensión $\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T$ y el gradiente de deformaciones $\mathbf{F}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{F}$. Sin embargo, según la ley constitutiva planteada

$$\boldsymbol{\sigma}^+(\mathbf{X}, t) = \mathbb{C} \nabla_{\mathbf{X}}\varphi_t^+(\mathbf{X}) = \mathbb{C} \mathbf{F}^+(\mathbf{X}, t) = \mathbb{C} \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \quad (5.16)$$

que no coincide con lo esperado. Se puede concluir que la ley constitutiva propuesta no verifica el principio de invariancia y por lo tanto no puede ser válida.

- b) Se propone una segunda ley constitutiva de la forma:

$$\mathcal{F}[\varphi_t(\mathbf{X})] = \mathbf{F}\mathbf{X}, t) \mathbb{C} \mathbf{E}(\varphi_t(\mathbf{X})) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)^T, \quad (5.17)$$

siendo $\mathbf{E}(\varphi_t)$ el tensor de Green-Lagrange asociado a la deformación φ_t . Un primer observador calcula la tensión de Cauchy como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \mathbb{C} \mathbf{E}(\varphi_t(\mathbf{X})) \mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t) . \quad (5.18)$$

Ahora bien, un segundo observador calcula el campo de tensiones también según (5.17) y obtiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^+ &= \mathbf{F}^+(\mathbf{X}, t) \mathbb{C} \mathbf{E}^+(\mathbf{X}, t) (\mathbf{F}^+)^T(\mathbf{X}, t) \\ &= \mathbf{Q} \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \mathbb{C} \mathbf{E}(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t) \mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}^T , \end{aligned} \quad (5.19)$$

por lo que cumple la condición de objetividad.

5.3. Modelos constitutivos reducidos

En esta sección estudiamos algunas formas más sencillas de formular modelos constitutivos para materiales simples que verifican siempre el principio de objetividad.

Recordamos que un material simple es aquel cuya ley constitutiva depende de la deformación solamente a través de su gradiente. La ley constitutiva más general de un material simple es pues

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}_{\mathcal{H}}(\mathbf{X})) , \quad (5.20)$$

siendo $\mathbf{F}_{\mathcal{H}}(\mathbf{X})$ la historia de gradientes de deformación en el punto \mathbf{X} hasta el instante de tiempo t y $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\cdot)$ una función de argumento tensorial y de valor tensorial y simétrico.

El principio de objetividad establece que para un material simple y cualquier función $\mathbf{Q} : \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$ se verifica que

$$\mathbf{Q}(t) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) \mathbf{Q}^T(t) = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{Q}(t) \mathbf{F}_{\mathcal{H}}(\mathbf{X})) . \quad (5.21)$$

Si en la relación anterior elegimos $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{R}^T(t)$, siendo $\mathbf{R}(t)$ la parte rotacional de la descomposición polar del gradiente de deformación en cada instante, se obtiene

$$\mathbf{R}^T(t) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) \mathbf{R}(t) = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{U}_{\mathcal{H}}(\mathbf{X})) , \quad (5.22)$$

donde ahora $\mathbf{U}_{\mathcal{H}}(\mathbf{X})$ es la historia del tensor derecho de alargamientos. De otra manera:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}(t) \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{U}_{\mathcal{H}}) \mathbf{R}^T(t) . \quad (5.23)$$

En otras palabras, siempre que una ley constitutiva de un material simple sea de la forma (5.23), ésta verificará el principio de invariancia.

Es sencillo comprobar a partir de la última relación obtenida que existen expresiones alternativas que permiten formular leyes constitutivas invariantes tales como:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}(t) \check{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{C}_{\mathcal{H}}(\mathbf{X})) \mathbf{R}^T(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \check{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{C}_{\mathcal{H}}(\mathbf{X})) \mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t) , \quad (5.24)$$

y muchas otras más, basadas en medidas de deformación diferentes.

5.4. Simetrías

Algunos materiales presentan simetrías en su respuesta, es decir, su relación tensión-deformación es idéntica en direcciones distintas. En particular, algunos materiales son isótropos, es decir que su respuesta es idéntica en todas las direcciones. En esta sección estudiamos las simetrías únicamente de materiales simples.

La definición formal de una simetría es la siguiente. Sea \mathcal{G} un subgrupo de $O(3)$. Es decir, \mathcal{G} es un conjunto de tensores ortogonales, no necesariamente propios, que incluye el tensor unidad y tales que sus posibles combinaciones y sus inversas también están incluidas. Se dice que \mathcal{G} es el grupo de simetría de un material en un punto \mathbf{X} del cuerpo si

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}\mathbf{R}, \mathbf{X}) , \quad (5.25)$$

para todo tensor ortogonal $\mathbf{R} \in \mathcal{G}$. En particular, si $\mathcal{G} = O(3)$, se dice que el material es isótropo.

La relación anterior indica que si un material tiene una cierta simetría en un punto, no se puede distinguir su respuesta constitutiva de la que tendría si localmente se hubiera “girado” mediante una transformación \mathbf{R} .

El principio de objetividad requiere además que, para todo tensor ortogonal \mathbf{Q} , se cumpla la relación

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \mathbf{Q} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}) \mathbf{Q}^T . \quad (5.26)$$

Escogiendo en esta última expresión $\mathbf{Q} = \mathbf{R} \in \mathcal{G}$ y empleando la definición de simetría (5.25), se obtiene esta relación para las leyes constitutivas:

$$\mathbf{R} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) \mathbf{R}^T = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{R}\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{R}\mathbf{F}\mathbf{R}^T, \mathbf{X}) . \quad (5.27)$$

5.4.1. Funciones isótropas

Una función W de variable tensorial es *isótropa* si verifica

$$W(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T) = W(\mathbf{T}) \quad (5.28)$$

para toda rotación \mathbf{Q} y todo tensor simétrico \mathbf{T} . Toda función de este tipo se puede escribir como otra función de depende únicamente de los autovalores del argumento o de sus invariantes principales, es decir,

$$W(\mathbf{T}) = \bar{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \tilde{W}(I_1(\mathbf{T}), I_2(\mathbf{T}), I_3(\mathbf{T})) . \quad (5.29)$$

Es fácil comprobar que si una función sólo depende de los autovalores o los invariantes de un tensor simétrico, entonces ha de ser isótropa. Para demostrar la implicación inversa vamos a comprobar que si \mathbf{T} y \mathbf{S} son dos tensores simétricos que tienen los mismos autovalores entonces $W(\mathbf{T}) = W(\mathbf{S})$ y por tanto la función W sólo puede depender de estos. Para comprobarlo, si $\{\mathbf{v}_i\}$ y $\{\mathbf{w}_i\}$ son las bases espectrales de \mathbf{T} y \mathbf{S} , respectivamente, entonces existe un rotación \mathbf{Q} tal que $\mathbf{w}_i = \mathbf{Q}\mathbf{v}_i$ y por ser la función isótropa se cumple que

$$W(\mathbf{T}) = W(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T) = W\left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i (\mathbf{Q}\mathbf{v}_i) \otimes (\mathbf{Q}\mathbf{v}_i)\right) = W\left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{w}_i \otimes \mathbf{w}_i\right), \quad (5.30)$$

que coincide con $W(\mathbf{S})$.

5.5. Clasificación de los modelos constitutivos

Intentamos ahora clasificar de forma muy genérica los diversos tipos de materiales atendiendo a las propiedades de sus leyes constitutivas correspondientes. Véase [1].

Distinguiamos los siguientes tipos de materiales:

- **Fluidos:** Un material se dice que es fluido si su respuesta no varía después de una deformación cualquiera, siempre y cuando ésta última respete la densidad del mismo. Por ello, cualquier configuración de un fluido es una configuración indeformada.
- **Sólido:** Se dice que un material es sólido si posee una configuración especial, o de referencia, tal que cualquier deformación que no sea un movimiento de sólido rígido lleva al cuerpo a una nueva configuración en la cual su respuesta material es diferente. Además, los cuerpos sólidos pueden a su vez clasificarse en las siguientes categorías:
 - **Elástico:** Un material sólido es elástico si su respuesta no presenta histéresis y además independiente de la velocidad de aplicación de las cargas.
 - **Plástico:** Un material es de este tipo si presenta histéresis en los ciclos de carga, pero su respuesta es independiente de la velocidad de aplicación de las cargas.
 - **Viscoelástico:** Un material es viscoelástico si, a pesar de no mostrar histéresis, su deformación depende de la velocidad de aplicación de las cargas.
 - **Viscoplástico:** Finalmente, un material es de esta clase si su respuesta depende de la la velocidad de la carga y además posee histéresis.

Resumen de fórmulas importantes

Modelo constitutivo	$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}[\boldsymbol{\varphi}_t]$
Movimiento superpuesto	$\boldsymbol{\varphi}_t^+ = \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\varphi}_t + \mathbf{c}(t)$
Condición de objetividad	$\mathcal{F}[\boldsymbol{\varphi}_t^+] = \mathbf{Q}(t)\mathcal{F}[\boldsymbol{\varphi}_t]\mathbf{Q}^T(t)$

Problemas

Problema 5.1. Un fluido newtoniano es el que establece que la tensión de Cauchy en todo punto es de la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d} ,$$

siendo p un escalar, \mathbf{I} el tensor identidad, μ una constante y \mathbf{d} , la tasa de deformación. Comprobar que este modelo es objetivo.

Problema 5.2. El modelo de sólidos neo hookeanos es aquel en el que la tensión de cauchy se formula como

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{b} + \lambda \operatorname{tr}[\mathbf{b}]\mathbf{I} ,$$

siendo λ, μ dos constantes y \mathbf{b} el tensor izquierdo de Cauchy-Green. Demostrar que el modelo es objetivo.

Problema 5.3. Demostrar que un modelo viscoelástico de la forma

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha\mathbf{d} ,$$

con α una constante, no puede ser objetivo.

Bibliografía

- [1] C. Truesdell and W. Noll. *The non-linear field theories of mechanics*. Springer, Berlin Heidelberg, second edition, 1992.

Capítulo 6

Mecánica de fluidos

En este capítulo estudiamos los medios continuos fluidos y que se caracterizaron en el capítulo 5 como aquellos que no poseen una configuración sin deformar.

No es el propósito de este capítulo presentar un resumen de un curso de Mecánica de Fluidos. El objetivo es aplicar los conceptos presentados en capítulos anteriores al estudio de este tipo de medios y así apreciar la capacidad de la metodología desarrollada. Además, este enfoque permite abordar el análisis de los fluidos desde un punto de vista común al del resto de los cuerpos, lo cual favorece su comprensión.

A partir de la descripción cinemática ya estudiada y mediante la selección de modelos constitutivos adecuados se obtienen las ecuaciones de modelos de mecánica de fluidos de complejidad variable. Es posible, siempre dentro del mismo marco teórico, obtener las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los fluidos ideales, de la hidrostática, las ecuaciones de Navier-Stokes, el origen de la turbulencia, etc. Sin embargo, por limitaciones de tiempo sólo se presentarán algunos de estos modelos.

La mecánica de fluidos es un campo donde la hipótesis de continuidad se verifica de forma muy precisa. A diferencia de los cuerpos sólidos, donde los defectos microestructurales son muy comunes y responsables en gran medida del comportamiento de dichos materiales, los fluidos son más homogéneos y los efectos de tamaño se pueden ignorar sin cometer grandes errores en un gran número de situaciones. Además los modelos constitutivos más representativos, y que estudiaremos en este capítulo, también se ajustan muy bien al comportamiento de los fluidos reales. Por todo ello, la Mecánica de Medios Continuos sirve para formular modelos de mecánica de fluidos cuyos resultados se ajustan mucho a la realidad.

6.1. Cinemática

En el capítulo 2 se estudió en detalle la cinemática de medios continuos y todo lo contenido en dicho capítulo aplica a las deformaciones características de los cuerpos fluidos. En esta sección complementamos los conceptos presentados anteriormente y definimos algunos conceptos que no han tenido utilidad hasta ahora en la asignatura.

6.1.1. Velocidad y aceleración

En primer lugar, repasamos el concepto de velocidad y aceleración espaciales. El primero de ellos es la expresión euleriana de la velocidad material, es decir:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1} \right)(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{V} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1})(\mathbf{x}, t) . \quad (6.1)$$

De la misma manera, la aceleración espacial es la expresión euleriana de la aceleración material:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1} \right)(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{A} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1})(\mathbf{x}, t) . \quad (6.2)$$

La velocidad y aceleración espacial están relacionadas por la siguiente expresión:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) . \quad (6.3)$$

6.1.2. Líneas de corriente y trayectorias

Si se conoce el campo de velocidades espaciales $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ en un instante t^* , se puede definir una **línea de corriente** como una curva integral de dicho campo vectorial, es decir, una curva $\mathbf{x} = \mathbf{c}(\alpha)$ en función de un escalar α tal que su vector tangente en cualquiera de sus puntos coincide con el vector velocidad. Matemáticamente,

$$\mathbf{c}'(\alpha) = \mathbf{v}(\mathbf{c}(\alpha), t^*) . \quad (6.4)$$

Obsérvese que las líneas de corriente están definidas para un instante de tiempo t^* y que su forma depende únicamente del campo de velocidad espacial en dicho instante. Es posible, por tanto, que un instante después o antes de t^* las líneas de corriente cambien. Si se toma una curva cerrada que no sea una curva de corriente, las curvas de corriente que pasan por cada uno de los puntos de la primera curva forman una superficie llamada **tubo de corriente**. Puesto que las líneas de corriente pueden cambiar con el tiempo, los tubos de corriente también.

Un concepto relacionado con el de línea de corriente es el de **trayectoria**, que ya apareció en el capítulo 2. Dado un punto $\bar{\mathbf{x}}$ del espacio y un instante

de tiempo t^* , su trayectoria es la unión de las sucesivas posiciones que ocupa la partícula que se ocupa la posición $\bar{\mathbf{x}}$ en el instante t^* . La descripción material de esta curva $\boldsymbol{\tau}(t)$ es

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}, t^*), t) . \quad (6.5)$$

En Mecánica de fluidos se emplea frecuentemente la descripción espacial y ésta requiere, para encontrar la expresión de la trayectoria resolver una ecuación diferencial similar a (6.4):

$$\boldsymbol{\tau}'(t) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\tau}(t), t) , \quad \boldsymbol{\tau}(0) = \bar{\mathbf{x}} . \quad (6.6)$$

Para demostrar que esta ecuación es la forma diferencial de la definición (6.5) basta con derivar esta última con respecto al tiempo, resultando

$$\boldsymbol{\tau}'(t) = \mathbf{V}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}, t^*), t) \quad (6.7)$$

y utilizar la relación (6.1) entre la velocidad material y la espacial para obtener

$$\boldsymbol{\tau}'(t) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}, t^*), t), t) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\tau}(t), t). \quad (6.8)$$

En general, la línea de corriente que pasa por un punto en un instante es distinta de la trayectoria de la partícula que se encuentra en dicho momento en ese preciso lugar. Sin embargo, si el movimiento es *estacionario*, es decir, si

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 , \quad (6.9)$$

entonces ambas curvas coinciden pues son la solución a la ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{\tau}'(t) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\tau}(t)) , \quad \boldsymbol{\tau}(0) = \bar{\mathbf{x}}. \quad (6.10)$$

6.1.3. Vorticidad

También recordamos del capítulo 2 que la parte hemisimétrica del gradiente espacial de velocidades es el llamado *tensor de spin* $\hat{\mathbf{w}}$. Este tensor tiene un vector asociado definido como

$$\boldsymbol{\xi} = 2 \text{ axial}[\hat{\mathbf{w}}] \quad (6.11)$$

y que se conoce como la *vorticidad*. Se puede demostrar que la vorticidad también se puede obtener mediante la expresión:

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) , \quad (6.12)$$

y que posee múltiples aplicaciones en mecánica de fluidos. Este campo vectorial expresa la rotación diferencial que se produce debido a la deformación. Por lo tanto, se dice que una deformación o un flujo es *irrotacional* si el

vector de vorticidad se anula en todo punto. Este campo vectorial sirve también para definir una cantidad escalar llamada **circulación**. Sea γ una curva cerrada fija en el espacio definida en forma paramétrica como $\mathbf{x} = \gamma'(\alpha)$. La circulación en esta curva se define como la integral

$$\mathcal{C}_\gamma = \oint_\gamma \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \gamma'(\alpha) d\alpha. \quad (6.13)$$

Si esta curva es el contorno de una superficie Σ de normal \mathbf{n} , por el teorema de Stokes, se tiene que

$$\mathcal{C}_\gamma = \int_\Sigma \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) da = \int_\Sigma \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) da. \quad (6.14)$$

Nótese que la circulación alrededor de una curva se puede calcular recorriendo esta en dos sentidos opuestos. Los signos de estas dos integrales son opuestos.

Una curva tangente en todos sus puntos al campo de vorticidad se denomina **línea de vorticidad** y todas las líneas de vorticidad que pasan por los puntos de una curva cerrada forman un **tubo de vorticidad**.

Teorema 6.1.1. *La circulación en dos secciones cualesquiera de un tubo de vorticidad son iguales.*

Demostración. Si tomamos un tramo \mathcal{T} de un tubo de vorticidad comprendido entre dos secciones Σ_1 y Σ_2 del mismo, se tiene que

$$\int_{\mathcal{T}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{T}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) dv = 0,$$

pues la divergencia de un campo que a su vez es el rotacional de otro, se anula. Por el teorema de la divergencia,

$$0 = \int_{\partial\mathcal{T}} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) da.$$

Además el contorno de \mathcal{T} se divide en tres superficies: Σ_1 , Σ_2 y la superficie lateral Σ_0 , cuya normal es perpendicular a la vorticidad, pues así se define el tubo. Supongamos que γ_1 y γ_2 sean las curvas del contorno de Σ_1 y Σ_2 , respectivamente. Empleando el teorema de Stokes se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) da \\ &= \int_{\partial\Sigma_1} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \gamma_1'(\alpha) d\alpha + \int_{\partial\Sigma_2} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \gamma_2'(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

La demostración concluye utilizando el hecho de que las dos integrales de la expresión anterior están recorridas en sentidos contrarios (orientados según la normal saliente a \mathcal{T}). Si se usa la misma orientación para las dos circulaciones, se comprueba que éstas tienen el mismo valor. \square

Es inmediato comprobar que la circulación de dos secciones de un tubo de vorticidad ha de ser la misma

Teorema 6.1.2 (Kelvin). *Sea γ_t una curva material. El cambio de circulación \mathcal{C}_{γ_t} en el tiempo se puede calcular como:*

$$\frac{d\mathcal{C}_{\gamma_t}}{dt} = \oint_{\gamma_t} \mathbf{a}(\gamma_t(\alpha), t) \cdot \gamma_t'(\alpha) d\alpha, \quad (6.15)$$

siendo \mathbf{a} la aceleración espacial.

Demostración. Para demostrar este resultado, recordamos que una curva material ha de ser de la forma $\gamma_t = \varphi_t(\Gamma)$, siendo Γ una curva en la configuración de referencia. La derivada de la circulación sobre esta curva se puede calcular como:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{C}_{\gamma_t}}{dt} &= \frac{d}{dt} \oint_{\gamma_t} \mathbf{v}(\gamma_t(\alpha), t) \cdot \gamma_t'(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{d}{dt} \oint_{\Gamma} \mathbf{V}(\Gamma(\alpha), t) \cdot \mathbf{F}(\Gamma(\alpha), t) \Gamma'(\alpha) d\alpha \\ &= \oint_{\Gamma_{ref}} (\mathbf{A}(\Gamma(\alpha), t) \cdot \mathbf{F}(\Gamma(\alpha), t) \Gamma'(\alpha) + \mathbf{V}(\Gamma(\alpha), t) \cdot \dot{\mathbf{F}}(\Gamma(\alpha), t) \Gamma'(\alpha)) d\alpha \\ &= \oint_{\Gamma_{ref}} (\mathbf{A}(\Gamma(\alpha), t) \cdot \mathbf{F}(\Gamma(\alpha), t) \Gamma'(\alpha) + \mathbf{V} \cdot (\mathbf{l} \circ \varphi_t)(\Gamma(\alpha), t) \mathbf{F}(\Gamma(\alpha), t) \Gamma'(\alpha)) d\alpha \\ &= \oint_{\gamma_t} (\mathbf{a}(\gamma_t(\alpha), t) + \mathbf{l}^T(\gamma_t(\alpha), t) \mathbf{v}(\gamma_t(\alpha), t)) \cdot \gamma_t'(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (6.16)$$

La integral del último sumando se anula pues

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_t} \mathbf{l}^T(\gamma_t(\alpha), t) \mathbf{v}(\gamma_t(\alpha), t) \cdot \gamma_t'(\alpha) d\alpha &= \oint_{\gamma_t} \mathbf{v}(\gamma_t(\alpha), t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\gamma_t(\alpha), t) \gamma_t'(\alpha) d\alpha \\ &= \oint_{\gamma_t} \frac{d}{d\alpha} \frac{|\mathbf{v}(\gamma_t(\alpha), t)|^2}{2} d\alpha = 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

al ser la curva γ_t cerrada. □

6.2. Fluidos perfectos

El primer tipo de fluido que se estudia el llamado **fluido perfecto**. Esta clase de fluidos se distingue porque el tensor de tensiones es esférico en todo punto y de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t) \mathbf{I}. \quad (6.18)$$

El escalar p se denomina **presión**. Algunos autores llaman fluidos perfectos sólo a aquellos en los que, además de la relación (6.18), el fluido es incompresible.

A partir de la condición (6.18) se puede comprobar que un fluido de este tipo no puede soportar, ni transmitir, esfuerzos tangenciales (de cortante). La fuerza por unidad de superficie que soportan estos fluidos en un punto \mathbf{x} y sobre una superficie de normal \mathbf{n} :

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} , \quad (6.19)$$

que sólo tiene componente normal. Por ello, y como demostraremos rigurosamente más adelante, un fluido perfecto sin rotación no puede agitarse de forma que desarrolle tensiones tangenciales. De manera análoga, un fluido perfecto que tenga rotación no podrá detenerse.

Los fluidos que aparecen en la naturaleza no son nunca perfectos, puesto que siempre ejercen al menos una pequeña resistencia a la cizalladura. Sin embargo la aproximación (6.18) es suficientemente buena para la resolución de un gran número de situaciones de interés, dentro de un cierto rango de velocidades, temperatura y presión.

6.2.1. Las ecuaciones de Euler para fluidos perfectos incompresibles

Consideramos ahora fluidos perfectos que además son incompresibles. La incompresibilidad, como se estudió en el capítulo, se puede expresar de numerosas maneras y recordamos que una de ellas es equivalentes:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 . \quad (6.20)$$

Sustituyendo la expresión de la tensión característica de los fluidos perfectos (6.18) en la ecuación de balance de cantidad de movimiento se obtienen, junto con la condición de incompresibilidad, se obtienen las **ecuaciones de Euler**:

$$-\nabla_{\mathbf{x}} p + \rho \mathbf{b} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \mathbf{v} \right) , \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 . \quad (6.21)$$

6.2.2. El teorema de Bernoulli en fluidos perfectos

Consideramos ahora un fluido ideal, incompresible y homogéneo con fuerzas volumétrica aplicadas que derivan de un potencial ψ :

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = -\nabla_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}, t) , \quad (6.22)$$

por ejemplo, el potencial gravitatorio. Entonces la densidad espacial es constante y de la ecuación de Euler (6.21) se puede deducir que la aceleración espacial \mathbf{a} deriva a su vez de otro potencial escalar:

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{\mathbf{x}} p - \nabla_{\mathbf{x}} \psi = -\nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{p}{\rho} + \psi \right) . \quad (6.23)$$

A partir de la siguiente identidad vectorial

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}}(|\mathbf{v}|^2) + \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{v} , \quad (6.24)$$

siendo $\boldsymbol{\xi}$ la vorticidad del flujo, y combinando las ecuaciones (6.23) y (6.24), se obtiene la siguiente formulación de las ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}}(|\mathbf{v}|^2) + \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{v} = -\nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{p}{\rho} + \psi\right) , \quad (6.25)$$

Consideremos ahora un flujo en régimen estacionario. En estas condiciones, el término $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ se anula. Además, como vimos en la sección 6.1, las trayectorias coinciden con las líneas de corriente, que son a su vez tangentes al campo de velocidades. Una línea de corriente es una curva $\mathbf{x} = \mathbf{c}(\alpha)$ con vector tangente

$$\boldsymbol{\eta}(\alpha) = \mathbf{c}'(\alpha) , \quad (6.26)$$

paralelo a $\mathbf{v}(\mathbf{c}(\alpha))$. Empleando la ecuación (6.25) podemos afirmar que en todo punto de una línea de corriente:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}}(|\mathbf{v}|^2) + \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{p}{\rho} + \psi\right) \right] \cdot \boldsymbol{\eta} \\ &= \left[\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{x}}(|\mathbf{v}|^2) + \nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{p}{\rho} + \psi\right) \right] \cdot \boldsymbol{\eta} \\ &= \nabla_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\rho} + \psi\right) \cdot \boldsymbol{\eta} . \end{aligned} \quad (6.27)$$

Definimos la cantidad escalar

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 + \frac{p(\mathbf{x})}{\rho} + \psi(\mathbf{x}) \quad (6.28)$$

y reescribimos la identidad (6.27) como

$$0 = \nabla_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) , \quad \text{siendo } \mathbf{x} = \mathbf{c}(\alpha) , \quad (6.29)$$

o, lo que es lo mismo,

$$(\Phi \circ \mathbf{c})'(\alpha) = 0 . \quad (6.30)$$

Esta última expresión expresa que la cantidad Φ definida en (6.28) es constante a lo largo de los puntos que forman una línea de corriente, y es conocida como el *teorema de Bernoulli*.

Una situación muy habitual en ingeniería es aquella en la que las fuerzas másicas derivan de un potencial gravitatorio, $\psi(\mathbf{x}) = g \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3$, siendo g la aceleración de la gravedad. En este caso la cantidad Φ definida en la ecuación (6.28) toma el valor

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 + \frac{p(\mathbf{x})}{\rho} + g x_3 . \quad (6.31)$$

En hidráulica se define más usualmente la siguiente cantidad, que simplemente cambia de escala la función Φ ,

$$H(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2}{2g} + \frac{p(\mathbf{x})}{\rho g} + x_3 .$$

Con estas definiciones, se puede enunciar el siguiente resultado

Teorema 6.2.1 (Bernoulli). *En un fluido perfecto, homogéneo e incompresible, sometido a cargas gravitatorias, la suma de la altura geométrica x_3 , la altura piezométrica $\frac{p(\mathbf{x})}{\rho g}$ y cinética $\frac{|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2}{2g}$ es una constante a lo largo de todas las líneas de corriente, si el flujo se encuentra en estado estacionario.*

6.2.3. Aspectos energéticos

En un fluido perfecto incompresible la potencia tensional que se desarrolla es siempre nula pues, para toda región material \mathcal{R}_t ,

$$P_{ten}(\mathcal{R}_t) = \int_{\mathcal{R}_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \, dv = \int_{\mathcal{R}_t} -p \mathbf{I} \cdot \mathbf{d} \, dv = \int_{\mathcal{R}_t} -p \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \, dv = 0 . \quad (6.32)$$

Utilizando este resultado se sigue que si sobre una región material no se aplica ninguna potencia externa, su energía cinética se conserva.

6.2.4. Fluidos barotrópicos

Un tipo de fluido perfecto es el denominado **barotrópico**. Este tipo de fluidos se caracterizan porque la presión depende únicamente de la densidad y se puede escribir

$$p(\mathbf{x}, t) = \pi(\rho(\mathbf{x}, t)) . \quad (6.33)$$

Gran parte de los desarrollos planteados para fluidos perfectos incompresibles se pueden repetir para fluidos barotrópicos. En concreto, se puede encontrar una ecuación de Euler para este tipo de fluidos y una expresión del teorema de Bernoulli. La primera se puede establecer de forma inmediata y resulta:

$$-\pi' \nabla_{\mathbf{x}} \rho + \rho \mathbf{b} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) , \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 . \quad (6.34)$$

El teorema de Bernoulli para este tipo de fluidos se demuestra de manera similar al enunciado anteriormente y únicamente es necesario modificar la expresión de la función Φ que se mantiene constante a lo largo de las líneas de corriente en un flujo estacionario. En el caso de los fluidos barotrópicos esta función queda definida de la siguiente manera

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 + \gamma(\rho(\mathbf{x})) + g x_3 . \quad (6.35)$$

La función escalar γ está definida por la expresión:

$$\gamma(\rho) = \int_a^\rho \frac{\pi'(\eta)}{\eta} d\eta , \quad (6.36)$$

siendo a una constante positiva pero arbitraria.

6.3. Fluidos newtonianos

Como se ha explicado ya, en la naturaleza los fluidos siempre oponen alguna resistencia a la deformación por cortante, y esto no puede explicarse mediante los modelos de fluidos perfectos. En esta sección se presentan los modelos constitutivos más sencillos y útiles de cuantos se pueden formular para representar efectos viscosos.

Estos modelos de material, llamados **fluidos newtonianos**, se definen mediante relaciones constitutivas de la forma

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mathbb{C}(\mathbf{x}, t)\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) , \quad (6.37)$$

siendo \mathbb{C} un tensor de cuarto orden que depende del material y $\mathbf{d} = \nabla_{\mathbf{x}}^s \mathbf{v}$, la tasa de deformación. Este último tensor proporciona una cierta medida del movimiento relativo de las partículas en el fluido. Si consideramos a partir de ahora únicamente fluidos isótropos y homogéneos, la forma del tensor constitutivo \mathbb{C} se simplifica, y se puede demostrar que éste sólo puede ser de la forma

$$\mathbb{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbb{I} . \quad (6.38)$$

y por tanto

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \lambda \operatorname{tr}[\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)]\mathbf{I} . \quad (6.39)$$

Los escalares λ, μ son viscosidades características del fluido que pueden, en general, depender de la temperatura y de la deformación. Sin embargo, en nuestro tratamiento serán considerados simplemente constantes del material.

En este punto debe de hacerse una aclaración respecto del concepto de **presión**. En la relación constitutiva (6.37), el campo escalar p se denomina **presión hidrostática** pues corresponde a la única presión que existiría en condiciones estáticas, es decir $\mathbf{d} = \mathbf{0}$. Sin embargo, en condiciones dinámicas generales, puede existir cierta confusión entre lo que es la presión y la media de los valores del tensor esférico de tensión pues tanto la parte debida a la presión hidrostática como la debida a la viscosidad pueden tener componente esférica. Por ello se define la presión media como

$$p_{med} = -\frac{1}{3}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}] = p - \frac{1}{3}\operatorname{tr}[\mathbb{C}\mathbf{d}] . \quad (6.40)$$

Esta presión media coincide, por lo anteriormente expuesto, con la presión hidrostática en condiciones de reposo del fluido.

Para un fluido newtoniano isótropo podemos expresar la ley constitutiva (6.37) también de la forma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{I} + \lambda(\operatorname{tr}(\mathbf{d}))\mathbf{I} + 2\mu\left(\frac{1}{3}(\operatorname{tr}(\mathbf{d}))\mathbf{I} + \operatorname{desv}[\mathbf{d}]\right) \\ &= -p\mathbf{I} + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\operatorname{tr}(\mathbf{d})\mathbf{I} + 2\mu\operatorname{desv}[\mathbf{d}] \\ &= -p\mathbf{I} + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v}\mathbf{I} + 2\mu\operatorname{desv}[\mathbf{d}].\end{aligned}\quad (6.41)$$

En la última igualdad hemos empleado la relación $\operatorname{tr}(\mathbf{d}) = \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v}$, cuya demostración es trivial. La constante $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ es la llamada viscosidad volumétrica, puesto que es la que afecta a la parte esférica del tensor tasa de deformación. Empleando este concepto, podemos escribir una ley constitutiva para la parte esférica de la tensión y otra para su parte desviadora:

$$\begin{aligned}\operatorname{desv}[\boldsymbol{\sigma}] &= 2\mu\operatorname{desv}[\mathbf{d}], \\ p_{med} &= p - \kappa\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v}.\end{aligned}\quad (6.42)$$

6.3.1. Las ecuaciones de Navier-Stokes

A continuación estudiamos la forma de la ecuación del balance de cantidad de movimiento en el caso de un fluido newtoniano. Esta ecuación se conoce con el nombre de Navier-Stokes y es la más empleada para simular flujos en fluidos reales. Ahora bien, su resolución debe de realizarse empleando métodos numéricos pues, como se verá ahora, su tratamiento analítico no es sencillo.

Para formular las ecuaciones de Navier-Stokes basta con desarrollar el término de la divergencia del tensor de tensiones, teniendo en cuenta la ecuación constitutiva (6.41). Se comprueba el siguiente resultado:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \nabla_{\mathbf{x}}\cdot[-p\mathbf{I} + \lambda\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v}\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}] = -\nabla_{\mathbf{x}}p + (\lambda + \mu)\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v} + \mu\Delta\mathbf{v}.\quad (6.43)$$

Sustituyendo esta expresión para la divergencia del tensor de tensiones se obtiene la ecuación de Navier-Stokes:

$$-\nabla_{\mathbf{x}}p + (\lambda + \mu)\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v} + \mu\Delta\mathbf{v} + \rho\mathbf{b} = \rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}\mathbf{v}\right).\quad (6.44)$$

En el caso de que el flujo sea incompresible, las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican:

$$\begin{aligned}-\nabla_{\mathbf{x}}p + \mu\Delta\mathbf{v} + \rho\mathbf{b} &= \rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}\mathbf{v}\right), \\ \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v} &= 0.\end{aligned}\quad (6.45)$$

6.3.2. Aspectos energéticos

La presencia de viscosidad en los fluidos tiene el efecto de que la energía se disipa por su causa. A diferencia de los fluidos perfectos incompresibles, donde la energía cinética se conserva en ausencia de fuerzas exteriores a continuación demostramos que la energía cinética en los fluidos newtonianos incompresibles puede decrecer debido a la viscosidad. En la práctica esto conlleva a que un fluido viscoso contenido en un recipiente y con un campo de velocidades no nulo irá “parándose” debido a la disipación.

Para ello recordemos que el teorema de las fuerzas vivas establece que sobre una región material \mathcal{R}_t cualquiera

$$P_{ext}(\mathcal{R}_t) = \dot{K}(\mathcal{R}_t) + P_{ten}(\mathcal{R}_t) . \quad (6.46)$$

Si la potencia exterior aplicada sobre una región material es nula entonces la variación de energía cinética se puede obtener de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{K}(\mathcal{R}_t) &= -P_{ten}(\mathcal{R}_t), \\ &= - \int_{\mathcal{R}_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \, dv \\ &= - \int_{\mathcal{R}_t} (-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}) \cdot \mathbf{d} \, dv \\ &= - \int_{\mathcal{R}_t} (-p\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} + 2\mu\|\mathbf{d}\|^2) \, dv \\ &= -2 \int_{\mathcal{R}_t} \mu\|\mathbf{d}\|^2 \, dv. \end{aligned} \quad (6.47)$$

La cantidad obtenida nunca es positiva y de hecho es negativa siempre que haya algo de fricción entre las partículas del fluido o con el contorno.

6.3.3. El número de Reynolds y el flujo de Stokes

Una técnica muy empleada en las ciencias, y en particular en el diseño de experimentos, es la búsqueda de cantidades adimensionales que reflejen, de alguna manera, la magnitud de los principales efectos que se quieren medir en un experimento, y sus relaciones entre ellos.

Existen multitud de números adimensionales, normalmente asociados a nombres de investigadores de su campo correspondiente. En mecánica de fluidos uno de los más importantes es el número de Reynolds, que describimos a continuación. Consideremos el flujo de un fluido. Sea V la magnitud de una velocidad característica del problema, y L una longitud también característica. El número de Reynolds se define como:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} . \quad (6.48)$$

Un número de Reynolds alto indica que el flujo que se estudia los efectos inerciales son importantes comparados con los efectos viscosos, y viceversa. Para que en la resolución matemática de un problema sea razonable ignorar los efectos viscosos (es decir, emplear un modelo con un fluido perfecto) es una condición necesaria que el número de Reynolds sea muy grande.

En el caso opuesto, cuando el número de Reynolds es muy pequeño, los efectos viscosos son mucho más importantes que los efectos inerciales (no se puede decir simplemente que la viscosidad es mucho mayor que la densidad) y éstos últimos se pueden ignorar. Cuando los efectos inerciales se desprecian en la ecuación (6.45) de Navier-Stokes de un fluido incompresible obtenemos las ecuaciones del flujo de Stokes:

$$-\nabla_{\mathbf{x}}p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{b} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v} = 0, \quad (6.49)$$

con $\nu = \mu/\rho$. Estas ecuaciones se usan como modelo matemático para flujos lentos de fluidos viscosos.

6.3.4. Fluido newtoniano con transmisión de calor

De manera breve resumimos las ecuaciones que rigen el movimiento y la energía de un fluido newtoniano en un flujo no isoterma. A la ecuación de continuidad y la ecuación de balance de cantidad de movimiento hay que añadir la ley constitutiva para la tensión tal y como aparecen en la ecuación (6.41). Además, para el caso de un fluido compresible es necesario proporcionar un modelo para describir la relación entre la presión y la densidad, que de manera general se puede escribir como

$$F(p, \rho, \theta) = 0, \quad (6.50)$$

y se conoce como la *ecuación de estado*. Para cerrar el modelo es necesario postular también una relación entre la energía interna y el resto de variables. Lo más usual es utilizar una *ecuación calórica* de la form

$$u = f(\rho, \theta), \quad (6.51)$$

y una ecuación como

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \kappa(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x}, t) \quad (6.52)$$

que relacione el flujo de calor y el gradiente de temperatura.

6.4. Fluidos no newtonianos

El comportamiento de algunos fluidos no queda bien reflejado por las soluciones que se obtienen de las ecuaciones de Navier-Stokes. Estos incluyen fluidos con polímeros o sedimentos en suspensión, la sangre y otros. Por

ejemplo, se ha observado que ocasionalmente que los coeficientes de viscosidad dependen de la tasa de deformación y en otras ocasiones que la respuesta del fluido tiene *memoria*, es decir, que depende no sólo de la deformación en ese instante sino también de las deformaciones pasadas.

Los modelos de fluidos no newtonianos pueden ser complejos y no es el objetivo entrar en una descripción detallada de los mismos. Concluimos esta sección simplemente enunciando un modelo constitutivo de este tipo, el **fluido de Reiner-Rivlin**, cuya expresión es:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \alpha_{ref}\mathbf{d} + \alpha_1\mathbf{d}^2, \quad (6.53)$$

siendo α_{ref}, α_1 dos funciones escalares de los invariantes de la tasa de deformación.

6.5. Hidrostática

En esta última sección del capítulo presentamos las ecuaciones de la hidrostática de fluidos y desarrollamos algunos resultados de interés. Antes de continuar, merece la pena indicar que en condiciones estáticas la tasa de deformación se anula y por tanto los fluidos perfectos, newtonianos y los no newtonianos se comportan de la misma manera. En todos estos casos, el tensor de tensiones es:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x})\mathbf{I}. \quad (6.54)$$

Esta simple propiedad permite demostrar el **principio de Pascal**, que afirma que en un fluido en condiciones de reposo la magnitud de la fuerza normal a una superficie es independiente de la orientación de la misma. Para demostrar esta propiedad basta con calcular el módulo de la fuerza normal sobre una superficie con vector normal $\mathbf{n}(\mathbf{x})$:

$$f_n = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x}). \quad (6.55)$$

En segundo lugar, en condiciones de reposo, la aceleración espacial en el fluido también se anula. Por esta razón, y utilizando la ecuación (6.54), la ecuación de equilibrio estático para todo tipo de fluidos es sencillamente

$$-\nabla_x p + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (6.56)$$

6.5.1. Presión hidrostática debida a la gravedad

Una aplicación de la hidrostática muy común es considerar la presión en el interior de un fluido debida a la fuerza de la gravedad. Si se considera un sistema de coordenadas cartesiano donde x_3 es la dirección vertical con sentido hacia arriba entonces las fuerzas másicas son $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_3$ y la ecuación de equilibrio (6.56) es:

$$\nabla_x p(\mathbf{x}) - \rho g \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \quad (6.57)$$

Suponiendo un valor de referencia $p = 0$ cuando $x_3 = 0$, entonces la ecuación en diferencias parciales (6.57) se puede resolver exactamente y su solución es:

$$p(\mathbf{x}) = -\rho g x_3 . \quad (6.58)$$

6.5.2. El principio de Arquímedes

El principio de Arquímedes afirma que todo cuerpo sumergido en un fluido en reposo experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del fluido desalojado.

Para demostrar este principio supongamos, como en el caso anterior, un sistema de coordenadas cartesiano con el origen en la superficie libre del fluido y con el eje x_3 en dirección vertical y hacia arriba, de forma que la fuerza de gravedad sea $\mathbf{b} = -g \mathbf{e}_3$.

En segundo lugar, postulamos que el campo de tensión en el cuerpo sumergido es $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \rho g x_3 \mathbf{I}$. Para verificar esta hipótesis basta con comprobar que tanto la condición de equilibrio en el cuerpo como las condiciones de contorno (la presión en el contorno es la debida al fluido) se cumplen:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho g \mathbf{e}_e + \rho(-g) \mathbf{e}_3 = \mathbf{0} , \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \rho g x_3 \mathbf{n} = -p(\mathbf{x}) \mathbf{n} . \quad (6.59)$$

Una vez comprobada la hipótesis basta con calcular la fuerza total sobre el cuerpo sumergido mediante el teorema de la divergencia:

$$\mathbf{F} = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} \, da = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{B}_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho g \mathbf{e}_3 \, dv = M g \mathbf{e}_3 , \quad (6.60)$$

que coincide con el resultado del principio de Arquímedes.

6.6. Condiciones de contorno en fluidos

Cuando se quiere resolver un problema concreto, ya sea de sólidos o fluidos, es necesario plantear las ecuaciones en derivadas parciales que lo gobiernan y las condiciones de contorno que sobre dicho cuerpo se imponen. En Mecánica de Fluidos este último aspecto es delicado y merece la pena dedicar una sección a describir los principales tipos posibles.

Condición de contorno de velocidades impuestas (condición de Dirichlet) En partes del contorno de un volumen material o de control las velocidades son a veces conocidas y de valor $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$. Es el caso, por ejemplo, de el campo de velocidades en la entrada a un recipiente cualquiera cuando el fluido llega por una tubería. En este caso se sabe que el perfil de velocidades es parabólico o muy parecido. La expresión matemática de este tipo de condiciones de contorno es, si la región donde se conoce la velocidad es Γ_v , de la forma:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_v, \forall t . \quad (6.61)$$

Condición de contorno de impenetrabilidad Otra condición de contorno muy habitual es la que expresa que el flujo no puede penetrar en las paredes del recipiente que lo contiene. En este caso, y si el la pared del recipiente tiene vector normal \mathbf{n} , la velocidad del fluido ha de ser tangencial a esta superficie, es decir, que en la pared Γ_p

$$(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p, \forall t, \quad (6.62)$$

siendo $\bar{\mathbf{v}}$ la velocidad de los puntos en la pared.

Condición de adherencia Los fluidos viscosos no sólo no pueden penetrar las paredes de los recipientes que los contienen sino que sus partículas en contacto con las paredes deben tener velocidad relativa nula con respecto a la posición de estas últimas. En este caso pues, la condición de contorno en toda pared Γ_p es:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p, \forall t. \quad (6.63)$$

Condición de contorno de tensiones o presiones Además de las velocidades, también se pueden prescribir los valores de las tensiones en partes del contorno. Si los vectores de tensión tienen un valor conocido $\bar{\mathbf{t}}$ en el contorno Γ_t entonces las este último tipo de condiciones de contorno son de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t, \forall t \quad (6.64)$$

En algunas circunstancias únicamente se impone el valor de la presión p

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t, \forall t. \quad (6.65)$$

Condiciones de contorno mixtas Es también posible imponer condiciones de contorno mixtas que incluyen velocidad y presión. Por ejemplo, se puede imponer en una región del contorno por un lado la presión y por otro las componentes tangenciales de la velocidad. Alternativamente, se podría imponer la componente tangencial de la tensión y la componente normal de la velocidad.

Condición de superficie libre La última condición, la de superficie libre, es algo más compleja y sirve para especificar, de forma implícita, la evolución de la superficie libre de un fluido en movimiento. A diferencia de las anteriores condiciones de contorno, esta sirve para determinar el contorno libre Γ_l , que no es fijo.

Existen dos manera de establecer esta condición. La primera y más sencilla consiste en imponer que la superficie libre está formada por aquellos

puntos del fluidos cuya presión es igual a la del fluido que lo rodea. En el caso de un fluido situado al aire libre la condición se expresa como:

$$\Gamma_l = \{ \mathbf{x} : p(\mathbf{x}, t) = p_{atm} \} , \quad (6.66)$$

siendo p_{atm} la presión atmosférica.

Una aproximación frecuente que sirve para determinar la posición de la superficie libre es imponer que ésta se trata de una superficie material, es decir, formada siempre por las mismas partículas. Si dicha superficie viene expresada, en todo instante t , como una ecuación escalar de la forma $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$ y las partículas son siempre las mismas $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$, entonces

$$0 = \phi(\mathbf{x}, t) \implies 0 = \frac{D}{Dt}\phi(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial\phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} , \quad (6.67)$$

en todos los puntos $\mathbf{x} \in \Gamma_l$.

Resumen de fórmulas importantes

Línea de corriente	$\mathbf{c}'(\alpha) = \mathbf{v}(\mathbf{c}(\alpha), t^*)$
Trayectoria	$\boldsymbol{\tau}'(t) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\tau}(t), t)$
Vorticidad	$\boldsymbol{\xi} = 2\boldsymbol{\omega} = \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{v}$
Circulación	$\mathcal{C}_\Gamma = \oint_\Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$
Fluido perfecto	$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$
Ec. Euler	$-\nabla_{\mathbf{x}} p + \rho\mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$
T. Bernoulli	$\Phi = \frac{ \mathbf{v} ^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gx_3 = \text{const.}$
Fluido newtoniano isótropo	$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}$
Ec. Navier-Stokes	$-\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} + \rho\mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$
	$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0$

Problemas

Problema 6.1. Demostrar que la aceleración espacial se puede calcular como

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{v},$$

siendo $\boldsymbol{\xi}$ el campo vectorial de vorticidad.

Problema 6.2. Demostrar que la densidad espacial $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ de un fluido homogéneo e incompresible es constante.

Problema 6.3. Demostrar que para un fluido barotrópico en el campo gravitatorio (orientado según \mathbf{e}_3) la cantidad

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 + \gamma(\rho(\mathbf{x})) + g x_3$$

se conserva a lo largo de las líneas de corriente de un flujo estacionario, siendo

$$\gamma(\rho) = \int_a^\rho \frac{\pi'(\eta)}{\eta} d\eta,$$

y a una constante arbitraria, pero positiva.

Problema 6.4. Se desea estudiar el llamado *flujo plano de Couette* que modela el movimiento estacionario de un fluido incompresible entre dos placas infinitas separadas una distancia h y sin ninguna fuerza exterior. Una de las placas está quieta y la otra se mueve con dirección fija en su plano y módulo U .

Para estudiar este problema se escoge un sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) siendo x la dirección de la velocidad de la placa móvil y z la dirección normal a ambos planos.

Suponiendo que el fluido es Newtoniano e incompresible, se pide:

- a) Explicar, usando un razonamiento geométrico, por qué ni el campo de velocidades ni el de presiones puede depender de las coordenadas x, y .
- b) Demostrar que si la velocidad espacial es de la forma $\mathbf{v} = f(z)\mathbf{i}$ entonces la condición de incompresibilidad se cumple.
- c) Demostrar, a partir de la ecuación de Navier-Stokes, que $f''(z) = 0$. Utilizando las condiciones de contorno de la velocidad (ha de ser nula en contacto con la placa fija y de módulo U en los puntos de contacto con la placa móvil) demostrar que $\mathbf{v} = \frac{zU}{h}\mathbf{i}$.
- d) Encuentra el valor de la tensión tangencial necesaria para deslizar la placa superior.

Problema 6.5. Demuestra que las ecuaciones de Euler para fluidos perfectos e incompresibles se pueden escribir como

$$-\nabla_{\mathbf{x}} p + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}), \quad \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Problema 6.6. El flujo de Stokes se caracteriza por tener un número de Reynolds muy bajo, es decir, porque las fuerzas inerciales son mucho más pequeñas que las viscosas.

- Obtener, a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, las ecuaciones del flujo de Stokes para un flujo estacionario e incompresible.

Se considera ahora el flujo plano de Stokes alrededor de un cilindro de radio a . En coordenadas cilíndricas con origen en el eje del cilindro, la velocidad del fluido se puede escribir como

$$v_r = v_{\infty} \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \cos \theta, \quad v_{\theta} = v_{\infty} \left(-1 + \frac{3a}{4r} + \frac{5a^3}{4r^3} \right) \sin \theta.$$

- Comprobar que lejos del cilindro la velocidad tiene sólo componente horizontal y que su módulo es v_{∞} .
- Calcular el valor de la presión en todos los puntos de la superficie del cilindro.

Nota: El operador laplaciano en polares tiene por expresión

$$\{\Delta \mathbf{v}\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \theta^2} - \frac{v_{\theta}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{array} \right\}$$

Problema 6.7. Demuestra que el modelo constitutivo de Reiner-Rivlin es objetivo.

Problema 6.8. Un fluido tiene una deformación que se puede expresar de la forma $\varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{X}$, siendo $\mathbf{Q}(t)$ un tensor de rotación. Empleando coordenadas cartesianas tanto para la configuración de referencia como para el espacio, el tensor \mathbf{Q} tiene por matriz

$$[\mathbf{Q}(t)] = \begin{bmatrix} \cos(\theta t) & \sin(\theta t) & 0 \\ -\sin(\theta t) & \cos(\theta t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde θ es una constante.

- a) Calcular la deformación inversa $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{X}$.
- b) Encontrar la expresión de la velocidad material y la velocidad espacial.

- c) Calcular la aceleración espacial.
- d) Describir las líneas de corriente y los tubos de vorticidad del fluido.

Problema 6.9. El campo de deformación de un fluido es

$$\varphi_t(X_1, X_2, X_3) = (e^{t/\tau} X_1, e^{-t/\tau} X_2, (1 + \frac{t^2}{\tau^2}) X_3) ,$$

donde X_i son las coordenadas cartesianas de los puntos en la configuración de referencia y τ es una constante con dimensiones de tiempo. Para este medio:

- a) Calcular la velocidad material y la espacial.
- b) Calcular la aceleración espacial de dos maneras distintas.
- c) Encontrar la expresión de las líneas de corriente en el instante $t = \tau$.
- d) Caracterizar el tipo de flujo estudiado usando adjetivos que describan el campo de velocidad.

Capítulo 7

Mecánica de sólidos

Los sólidos se caracterizan por tener una configuración especial, distinguible entre todas las demás que se suele tomar, sin perder generalidad, la configuración sin deformar y libre de tensiones. Las tensiones por tanto y otros efectos termodinámicos aparecen cuando la deformación separa al cuerpo de esta configuración singular. Por ello, y utilizando el principio de acción local, se puede concluir que para conocer las tensiones, energías y densidad en un punto es necesario conocer, en principio, la historia completa del gradiente de deformación y la temperatura.

En este capítulo, para simplificar el planteamiento, vamos a suponer siempre que las condiciones a las que están sometido los cuerpos son isotermas. Aún con esta restricción el número y tipo de modelos que se pueden emplear es muy numeroso pues la dependencia funcional de la respuesta con relación a la historia complica mucho la formulación. Así pues, en este capítulo sólo consideramos modelos elásticos, dejando los inelásticos para cursos más avanzados.

7.1. Elasticidad

Definimos un *material elástico* como aquel para el que la tensión nominal se puede expresar —en cada punto e instante— como una función del gradiente de deformación, también evaluado en ese mismo punto e instante y las propiedades del punto material en el que se evalúa, es decir,

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}). \quad (7.1)$$

Para aligerar la notación, escribiremos en este capítulo siempre $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F})$.

La relación (7.1) es el punto de partida de la elasticidad no lineal, en contraposición con los modelos de material que se emplean en elasticidad clásica. Los primeros permiten representar la respuesta de un gran número de materiales (metálicos, poliméricos, orgánicos, ...) en un rango de deformación arbitrariamente grande. La limitación de estos modelos no es tanto

que la expresión (7.1) no sea válida en un rango muy amplio, como que los materiales después de una cierta deformación empiezan a manifestar comportamiento inelástico, se dañan, etc.

También es conveniente poner de manifiesto que la respuesta de los materiales reales depende, a veces de manera muy marcada, de la velocidad de deformación. Así, un material que se comporta elásticamente para un rango de deformación grande cuando se carga despacio puede romperse con muy poca deformación si se carga rápidamente. A los procesos de carga muy lentos se los conoce como procesos *cuasi estáticos* y en ellos nos centraremos en este capítulo.

7.2. Hiperelasticidad

Algunos materiales elásticos poseen un propiedad termodinámica que los hace muy atractivos, además de sencillos de formular, por lo cual son, en la practica, los únicos que se emplean. Para describirlos, comencemos por considerar un ciclo de deformación, es decir, un proceso en el cual la deformación inicial y final sean iguales. En este tipo de procesos podemos calcular el trabajo total de las fuerzas externas sobre una región cualquiera como

$$W_{ext} = \oint \left[\int_{\mathcal{R}_{ref}} \rho_{ref} \mathbf{B} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} dV + \int_{\partial\mathcal{R}_{ref}} \mathbf{T} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} dA \right] dt . \quad (7.2)$$

Si el proceso es cuasi-estático se pueden ignorar todas las fuerzas inerciales que actúan durante el mismo. En él, y por el teorema de las fuerzas vivas, el trabajo empleado se puede expresar también como

$$W_{ext} = \oint \left[\int_{\mathcal{R}_{ref}} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV \right] dt = \int_{\mathcal{R}_{ref}} \left[\oint \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dt \right] dV . \quad (7.3)$$

Motivado por a esta expresión se define un *material hiperelástico* como aquel para el que se puede realizar *cualquier* ciclo de deformación cuasi-estática sin aplicar un trabajo neto. Empleando la última ecuación concluimos que $\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dt$ ha de ser un diferencial exacto y por tanto ha de existir una función \hat{W} , que la llamamos la *función de energía almacenada* o *función de energía interna* tal que

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) . \quad (7.4)$$

La función de energía almacenada proporciona un mecanismo muy útil para formular modelos de materiales sólidos. Sin embargo, no se puede utilizar cualquier función escalar para representar una energía interna. Como se vio en el capítulo 5, al menos esta función ha de ser objetiva, es decir,

que para cualquier rotación \mathbf{Q} y cualquier gradiente de deformación \mathbf{F} ha de verificarse que

$$\hat{W}(\mathbf{QF}, \mathbf{X}) = \hat{W}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) . \quad (7.5)$$

La forma más sencilla de asegurar esta condición es suponer que existe una segunda función \bar{W} tal que

$$\hat{W}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \bar{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}, \mathbf{X}) , \quad (7.6)$$

es decir, que la energía almacenada depende del gradiente de deformación a través del tensor derecho de Cauchy-Green. En este caso vemos que, de forma natural, se cumple que

$$\hat{W}(\mathbf{QF}, \mathbf{X}) = \bar{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{QF}, \mathbf{X}) = \bar{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}, \mathbf{X}) = \hat{W}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) . \quad (7.7)$$

Recordemos que la densidad de potencia interna por unidad de volumen de referencia se puede escribir como

$$\dot{W} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} . \quad (7.8)$$

A partir de estas relaciones y la ecuación (7.6) concluimos que

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) , \quad \mathbf{P} = 2 \mathbf{F} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) , \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \mathbf{F} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) \mathbf{F}^T . \quad (7.9)$$

La forma más sencilla, por tanto, de formular una relación constitutiva objetiva es usar una energía almacenada en función del tensor derecho de Cauchy-Green, cuya derivada —salvo por un factor igual a 2— coincide con el segundo tensor de tensión de Piola-Kirchhoff. Esto explica por qué este tensor, cuya interpretación física no es tan clara como la del tensor de Cauchy o el de tensión nominal, es tan usado en mecánica de sólidos.

7.2.1. Materiales elásticos e isótropos

En el capítulo 5 se presentó el concepto de simetría material. Según este, un material es *isótropo* en una partícula \mathbf{X} si su grupo de simetría es el de todas las rotaciones, es decir, si para todo tensor de rotación \mathbf{Q} y todo gradiente de deformación \mathbf{F} se verifica que

$$\hat{W}(\mathbf{FQ}, \mathbf{X}) = \hat{W}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) . \quad (7.10)$$

En términos de la función \bar{W} la relación (7.10) implica que

$$\bar{W}(\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}, \mathbf{X}) = \bar{W}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) . \quad (7.11)$$

Esta condición es equivalente a exigir que la función \bar{W} sólo dependa de \mathbf{C} a través de sus invariantes. Se puede por tanto formular que un material hiperelástico, objetivo e isótropo tiene por función de energía almacenada

$$\bar{W}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = \bar{W}(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}), \mathbf{X}) . \quad (7.12)$$

Para poder calcular las tensiones será necesario conocer la derivadas de los invariantes respecto de sus argumentos. Resumimos aquí el resultado que dejamos como ejercicio

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}) &= \mathbf{I} , \\ \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}) &= I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} , \\ \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}) &= I_3 \mathbf{C}^{-1} .\end{aligned}\tag{7.13}$$

7.2.2. Modelos desacoplados

Como en el caso de los fluidos, está justificado desacoplar la respuesta constitutiva volumétrica del resto. Para ello definimos un nuevo tensor de deformación

$$\tilde{\mathbf{C}} = \det(\mathbf{C})^{-1/3} \mathbf{C} = J^{-2/3} \mathbf{C} ,\tag{7.14}$$

que satisface, por definición, $\det \tilde{\mathbf{C}} = 1$. Si queremos formular modelos que descoplen la respuesta volumétrica del resto podemos postular energías almacenadas que tengan por expresión

$$\bar{W}(\mathbf{C}) = \hat{U}(J, \mathbf{X}) + \tilde{W}(\tilde{\mathbf{C}}, \mathbf{X}) ,\tag{7.15}$$

siendo ahora \hat{U} la parte de la energía almacenada que modela la respuesta volumétrica. Existen varias formas estándar de representar esta energía, como por ejemplo,

$$\begin{aligned}\hat{U}_1(J, \mathbf{X}) &= \frac{\kappa(\mathbf{X})}{2} (J - 1)^2 , \\ \hat{U}_2(J, \mathbf{X}) &= \frac{\kappa(\mathbf{X})}{2} (\log J)^2 , \\ \hat{U}_3(J, \mathbf{X}) &= \frac{\kappa(\mathbf{X})}{4} (J^2 - 1 - 2 \log J) .\end{aligned}\tag{7.16}$$

En todas ellas, la constante κ tiene el papel de una rigidez volumétrica del material. Para materiales isótropos, además, podemos combinar las ecuaciones (7.12) y (7.15) para escribir la energía almacenada como

$$\bar{W}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = \hat{U}(J, \mathbf{X}) + \tilde{W}(I_1(\tilde{\mathbf{C}}), I_2(\tilde{\mathbf{C}}), \mathbf{X}) .\tag{7.17}$$

7.2.3. Material neohookeano

El modelo constitutivo más sencillo se conoce con el nombre de *modelo neohookeano* y utiliza sólo una constante para la respuesta no volumétrica. La energía almacenada tiene por expresión

$$\bar{W}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = \hat{U}(J, \mathbf{X}) + \frac{\hat{\mu}(\mathbf{X})}{2} (I_1(\tilde{\mathbf{C}}) - 3) .\tag{7.18}$$

El escalar $\mu = \hat{\mu}(\mathbf{X})$ define una rigidez a la distorsión, que no de volumen, y que puede depender del punto. Si empleamos una energía almacenada para la parte volumétrica de la forma (7.16) se puede demostrar que, en deformaciones muy pequeñas, la constante μ coincide con el módulo de cortante de la teoría clásica de la elasticidad.

El segundo tensor de Piola-Kirchhoff de un material neohookeano es

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = \left(\hat{U}'(J)J - \frac{\mu}{3} \text{tr}(\tilde{\mathbf{C}}) \right) \mathbf{C}^{-1} + \mu J^{-2/3} \mathbf{I}. \quad (7.19)$$

Por tanto, la tensión de Cauchy se puede evaluar como

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T = \left(\hat{U}'(J) - \frac{\mu}{3} J^{-5/3} \text{tr}(\mathbf{C}) \right) \mathbf{I} + \mu J^{-5/3} (\mathbf{b} \circ \boldsymbol{\varphi}). \quad (7.20)$$

7.2.4. Material de Moony-Rivlin

El modelo neohookeano tiene la evidente ventaja de ser muy sencillo, y cuando se escogen sus constantes de manera correcta, tiene suficiente precisión para representar materiales que sufren sólo deformaciones moderadas antes de pasar a comportarse inelásticamente, como los metales, por ejemplo. Sin embargo, para otros materiales que pueden experimentar deformaciones elásticas muy grandes, por ejemplo algunos polímeros, el modelo neohookeano no tiene suficiente precisión. Existen numerosos modelos para este tipo de aplicaciones. Todos ellos emplean más constantes y resultan más complejos de calibrar. El siguiente modelo, en relación a su complejidad, es el de Mooney-Rivlin, cuya energía almacenada tiene por expresión

$$\bar{W}(\mathbf{C}, \mathbf{X}) = \hat{U}(J, \mathbf{X}) + \frac{C_1(\mathbf{X})}{2} (I_1(\tilde{\mathbf{C}}) - 3) + \frac{C_2(\mathbf{X})}{2} (I_2(\tilde{\mathbf{C}}) - 3). \quad (7.21)$$

En este modelo la función \hat{U} sigue representando la respuesta volumétrica; las constantes C_1, C_2 que deben ser ambas positivas, son responsables de calibrar la respuesta asociada al cambio de forma.

7.3. Incompresibilidad

La respuesta de todos los materiales sólidos es compresible. Sin embargo, hay algunos tipos de materiales en los que la deformación volumétrica es mucho más pequeña que el resto en cualquier movimiento o deformación que realicen. Para estos materiales resulta conveniente suponer que son completamente incompresibles pues así las ecuaciones se simplifican.

En la sección 7.2 se comentó que los materiales hiperelásticos pueden definirse como aquellos en para los cuales el trabajo ejercido sobre una región de un cuerpo en un ciclo *cualquiera* es nulo. Matemáticamente esta condición se expresaba como $\dot{W} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$ o en alguna de sus equivalencias.

Los movimientos de un sólido incompresible no son del todo arbitrarios pues ha de cumplirse que $J = 1$ o equivalentemente,

$$0 = \dot{J} = J \mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} . \quad (7.22)$$

Por esta razón, para un material hiperelástico sólo podemos asegurar que una parte de la tensión nominal deriva de una energía almacenada, pero que hay otra parte —paralela a \mathbf{F}^{-T} — que queda indeterminada por la relación constitutiva. Escribimos pues que

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{F}^{-T} , \quad \mathbf{S} = 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} - p \mathbf{C}^{-1} , \quad \boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\varphi} = 2 \mathbf{F} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T - p \mathbf{I} , \quad (7.23)$$

siendo p una función escalar que llamamos, con en el caso de los fluidos, la *presión*.

La presión en un sólido incompresible, por tanto, no se puede obtener del modelo constitutivo, como también ocurría con los fluidos. Es una contribución a la tensión que aparece para imponer la restricción de que la deformación sea isocórica, es decir, que $J = 1$.

7.4. Formulación completa del problema

En mecánica de fluidos vimos que al reemplazar la expresión de la tensión, bien para un fluido perfecto o para uno newtoniano, se obtenía una expresión simplificada de la ecuación del balance de cantidad de movimiento. Esto no es así, en general, para los sólidos. Los modelos constitutivos que se emplean para representar sólidos, empezando por el neo-hookeano, son tan complejos que no se puede obtener una expresión análoga a las ecuaciones de Euler o de Navier-Stokes. En su lugar, cuando se desea recoger las ecuaciones que gobiernan el problema del movimiento de un sólido ha de emplearse la ecuación original del balance de cantidad de movimiento y suplementarse con el modelo constitutivo. Como todas las expresiones son más cómodas cuando se expresan en la configuración de referencia, los problemas de sólidos se presentan, habitualmente, con una formulación Lagrangiana. Así pues, para hiperelasticidad, se escribiría el problema como

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \rho_{ref} \mathbf{B} &= \rho_{ref} \mathbf{A} , \\ \mathbf{P} &= 2 \mathbf{F} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} , \\ \mathbf{C} &= \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\varphi}^T \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\varphi} . \end{aligned} \quad (7.24)$$

7.5. Formulación variacional de la elasto-estática

Consideremos otra vez en esta sección los problemas cuasi estáticos de sólidos elásticos. El siguiente resultado identifica sus soluciones como los

minimizadores de un cierto funcional. Esta reformulación tiene consecuencias de muy largo alcance. Desde el punto de vista matemático permite estudiar la existencia de soluciones empleando herramientas muy potentes del cálculo variacional. Además, es el punto de partida del método de aproximación de Ritz, que a su vez puede considerarse la base del método de los elementos finitos. El nombre que tiene este resultado es el ***principio de la mínima energía potencial***, pues conceptualmente está al mismo nivel que la ley de conservación de la cantidad de movimiento. En realidad cualquiera de estos dos resultados se puede postular y el otro se puede considerar como un corolario.

Teorema 7.5.1 (Mínima energía potencial). *Sea \mathcal{S} es espacio de deformaciones admisibles, es decir,*

$$\mathcal{S} = \{ \varphi : \mathcal{B}_{ref} \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \text{ para } \mathbf{X} \in \partial_{\varphi} \mathcal{B}_{ref} \} . \quad (7.25)$$

*En un problema cuasi estático, la solución φ de problema elástico minimiza la **energía potencial***

$$\begin{aligned} V(\varphi) = & \int_{\mathcal{B}_{ref}} \hat{W}(\nabla_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{X}), \mathbf{X}) dV \\ & - \int_{\mathcal{B}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}) \cdot \varphi(\mathbf{X}) dV - \int_{\partial_T \mathcal{B}_{ref}} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) \cdot \varphi(\mathbf{X}) dA \end{aligned} \quad (7.26)$$

entre todas las funciones del espacio \mathcal{S} . Es decir, para cualquier $\psi \in \mathcal{S}$, se cumple que

$$V(\varphi) \leq V(\psi) . \quad (7.27)$$

Demostración. Para demostrar este resultado tomamos la siguiente perturbación de la configuración

$$\varphi_{\epsilon}(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}) + \epsilon \delta\varphi(\mathbf{X}) ,$$

donde $\delta\varphi$ es una **variación** de la deformación, es decir, una deformación arbitraria que es idénticamente nula en $\partial_{\varphi} \mathcal{B}_{ref}$. Un minimizador de la energía potencial ha de satisfacer la condición de optimalidad

$$0 = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} V(\varphi_{\epsilon}(\mathbf{X})) .$$

Operando esta identidad encontramos que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathcal{B}_{ref}} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}} (\nabla_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{X}), \mathbf{X}) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} (\delta \varphi(\mathbf{X})) \, dV \\
&\quad - \int_{\mathcal{B}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}) \cdot \delta \varphi(\mathbf{X}) \, dV - \int_{\partial_T \mathcal{B}_{ref}} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) \cdot \delta \varphi(\mathbf{X}) \, dA \\
&= \int_{\mathcal{B}_{ref}} \mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} (\delta \varphi(\mathbf{X})) \, dV \\
&\quad - \int_{\mathcal{B}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}) \cdot \delta \varphi(\mathbf{X}) \, dV - \int_{\partial_T \mathcal{B}_{ref}} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) \cdot \delta \varphi(\mathbf{X}) \, dA \\
&= \int_{\mathcal{B}_{ref}} -\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} \cdot \delta \varphi(\mathbf{X}) \, dV + \int_{\partial_T \mathcal{B}_{ref}} \mathbf{P} \mathbf{N} \cdot \delta \varphi(\mathbf{X}) \, dA \\
&\quad - \int_{\mathcal{B}_{ref}} \rho_{ref}(\mathbf{X}) \mathbf{B}(\mathbf{X}) \cdot \delta \varphi(\mathbf{X}) \, dV - \int_{\partial_T \mathcal{B}_{ref}} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) \cdot \delta \varphi(\mathbf{X}) \, dA .
\end{aligned}$$

Como la variación es arbitraria concluimos que

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \rho_{ref} \mathbf{B} = \mathbf{0} , \quad \mathbf{P} \mathbf{N} = \bar{\mathbf{T}} .$$

Con esto queda demostrado que un minimizador es aquella deformación que satisface las ecuaciones del equilibrio. \square

7.6. El principio de los trabajos virtuales

Presentamos, finalmente, una forma alternativa más de formular las ecuaciones del equilibrio de cualquier sólido deformable, no necesariamente elásticos. Esta tercera formulación se conoce como la **forma débil** del problema y es el punto de partida del método de aproximación de Galerkin, que a su vez es la base del método de los elementos finitos.

Teorema 7.6.1 (El principio de los trabajos virtuales). *En un problema cuasiestático, la solución φ satisface*

$$\int_{\mathcal{B}_{ref}} \mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w} \, dV - \int_{\mathcal{B}_{ref}} \rho_{ref} \mathbf{B}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{w} \, dV - \int_{\partial_T \mathcal{B}_{ref}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{w} \, dA , \quad (7.28)$$

para cualquier $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$ y siendo $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$.

Demostración. Empezamos demostrando que si una deformación satisface (7.24), entonces cumple el principio de los trabajos virtuales. A partir de la ecuación del equilibrio $\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \rho_{ref} \mathbf{B} = \mathbf{0}$ es inmediato comprobar que

$$0 = \int_{\mathcal{B}_{ref}} (\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \rho_{ref} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{w} \, dV$$

para cualquier $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$. Integrando por partes el término de la divergencia se obtiene directamente

$$0 = \int_{\mathcal{B}_{ref}} (-\mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w} + \rho_{ref} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_{ref}} \mathbf{PN} \cdot \mathbf{w} \, dA .$$

Utilizando la propiedad de que las funciones de \mathcal{S} son idénticamente nulas en $\partial_{\varphi} \mathcal{B}_{ref}$ queda demostrado que la ecuación del equilibrio implica en principio de los trabajos virtuales.

Para demostrar la equivalencia en sentido contrario integremos por partes la ecuación (7.28) para obtener

$$0 = \int_{\mathcal{B}_{ref}} (\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \rho_{ref} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_{ref}} (\mathbf{T} - \mathbf{PN}) \cdot \mathbf{w} \, dA . \quad (7.29)$$

A continuación, consideremos primero una función $\psi : \mathcal{B}_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea diferenciable, positiva en todo su dominio y que se anule en $\partial \mathcal{B}_{ref}$. Después, en la expresión (7.29) seleccionamos $\mathbf{w} = \psi \cdot (\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \rho_{ref} \mathbf{B})$ y, empleando la propiedad de que ψ se anula en el contorno, obtenemos

$$0 = \int_{\mathcal{B}_{ref}} \psi |\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \rho_{ref} \mathbf{B}|^2 \, dV . \quad (7.30)$$

Como $\psi > 0$, el resto de el integrando debe ser nulo y comprobamos la ecuación del equilibrio en el interior del cuerpo. En segundo lugar, escogemos ahora una función $\eta : \mathcal{B}_{ref} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea diferenciable, nula en $\partial_{\varphi} \mathcal{B}_{ref}$ y positiva en $\partial_T \mathcal{B}_{ref}$. En la ecuación (7.29) empleamos el resultado ya obtenido de que deformación cumple el equilibrio en el interior y seleccionamos $\mathbf{w} = \eta \cdot (\mathbf{PN} - \mathbf{T})$ por lo que

$$0 = \int_{\partial_T \mathcal{B}_{ref}} \eta |\mathbf{PN} - \mathbf{T}|^2 \, dA . \quad (7.31)$$

Como $\eta > 0$, el resto del integrando debe anularse y por tanto la ecuación del equilibrio en el contorno debe de cumplirse. \square

Resumen de fórmulas importantes

Material hiperelástico	$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}$
Sólido objetivo	$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}}$
Sólido objetivo incompresible	$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{C}} - p \mathbf{C}^{-1}$
Sólido isótropo	$\bar{W} = \bar{W}(I_1, I_2, I_3)$
Modelo neohookeano	$\bar{W}(\mathbf{C}) = U(J) + \frac{\mu}{2}(I_1(\tilde{\mathbf{C}}) - 3)$ $J = \sqrt{\det \mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C}$
Sólido incompresible	$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p \mathbf{F}^{-T}$
Energía potencial	$V = \int_{\mathcal{B}_{ref}} W(\nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\varphi}) dV - V_{ext}(\boldsymbol{\varphi})$ $V_{ext} = \int_{\mathcal{B}_{ref}} \rho_{ref} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\varphi} dV$ $+ \int_{\partial_N \mathcal{B}_{ref}} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varphi} dA$

Problemas

Problema 7.1. Demostrar que el tensor izquierdo de Cauchy-Green \mathbf{b} tiene los mismos invariantes que el tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} . Usando este resultado, demostrar que para un sólido elástico e isótropo la tensión de Cauchy se puede calcular con la expresión

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \mathbf{b} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{b}}.$$

Problema 7.2. Dibuja las funciones $\hat{U}_1, \hat{U}_2, \hat{U}_3$ y comenta sobre sus valores límite. ¿Cuál(es) de ellas parece más adecuada para modelar la respuestas volumétrica de un sólido?

Problema 7.3. Se desea estudiar la deformación de un cilindro elástico e incompresible cuando está sometido a tracción sobre sus caras planas. En su configuración de referencia se coloca un sistema de coordenadas cartesianas (X_1, X_2, X_3) en el centro del cilindro y con el eje X_3 orientado según el eje de revolución del mismo. Con este sistema, la deformación del cuerpo se describe mediante la aplicación

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = (\alpha X_1, \alpha X_2, \beta X_3)$$

en una base cartesiana en el espacio, siendo α, β dos constantes que modulan el tamaño de la deformación radial y axial, respectivamente. Suponiendo que el material del sólido es neo-hookeano con energía de deformación

$$\bar{W}(\mathbf{C}) = \frac{\mu}{2} (I_1(\mathbf{C}) - 3),$$

se pide

- a) Calcular el gradiente de deformación \mathbf{F} , el tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} y sus inversos.
- b) Determinar la relación entre α y β para que la deformación del cuerpo sea incompresible.
- c) Calcular el segundo tensor de Piola-Kirchhoff en función de α y p , en cualquier punto del cuerpo usando los resultados anteriores y la expresión

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} - p \mathbf{C}^{-1},$$

siendo p la presión, que puede depender de (X_1, X_2, X_3) .

- d) A partir de la expresión $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ encontrar el valor del primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y, utilizando la ecuación del equilibrio, concluir que la presión ha de ser constante.

- e) Utilizando el dato de que la superficie lateral del cilindro está libre de tensiones, calcular la relación entre p y α .
- f) Por último, sabiendo que el cilindro está sometido a una tensión de tracción de módulo t en sus dos caras planas, encontrar la relación entre t y α .

Problema 7.4. Un sólido cilíndrico de radio r tiene su eje de revolución alineado con el eje X de un sistema cartesiano de coordenadas. La deformación del cuerpo viene dada por la aplicación

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = (\alpha X_1, \beta X_2, \beta X_3)$$

en una base cartesiana del espacio, siendo α y β dos constantes.

- a) Sabiendo que el sólido es incompresible, determina el valor de β en función de α .
- b) Calcula \mathbf{F} y \mathbf{C} como funciones de α , únicamente.
- c) Suponiendo que el sólido sea hiper-elástico y su función de energía almacenada sea

$$\bar{W}(\mathbf{C}) = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3),$$

con μ constante, calcula los dos tensores de tensión de Piola-Kirchhoff y la tensión de Cauchy.

- d) Dibuja un diagrama cartesiano que muestre la relación entre α y la fuerza total ejercida sobre cualquier sección $X_1 = \text{constante}$.

Problema 7.5. Un tubo de material hiper-elástico incompresible tiene, en su configuración de referencia, longitud L , radio interno A y radio externo B . El tubo se somete a una presión interna π y por ello se deforma manteniendo la forma de un tubo, ahora de longitud l y radio interno a . Si el material se supone que es neo-hookeano con constante μ , calcular:

- a) La relación entre a , A , l y L empleando consideraciones geométricas sobre la deformación incompresible.
Trabajando a partir de ahora en coordenadas cilíndricas, calcular
- b) la deformación φ ,
- c) el gradiente de deformación \mathbf{F} , el tensor izquierdo de Cauchy-Green \mathbf{b} .
- d) Encontrar la relación entre a y $\lambda = l/L$.
- e) Obtener la expresión de los tensores $\boldsymbol{\sigma} \circ \varphi$ y \mathbf{P} en función de las coordenadas, λ , las propiedades del material y p , la presión.

- f) Empleando la ecuación del equilibrio, encontrar la ecuación diferencial que debe de satisfacer p .
- g) Determinar la expresión completa de p usando las condiciones de contorno de tensión en la superficie interior y exterior del tubo.
- h) Finalmente, encontrar la relación entre π y a , la presión aplicada y el radio interior del tubo

Extra: Comentar la expresión de la función $a(\pi)$, cómo se compara con lo que se esperaría, ...

Problema 7.6. En un sólido hiperelástico se define el tensor energía-momento mediante la expresión

$$\Sigma(\mathbf{X}) = W(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X})\mathbf{I} - \mathbf{F}^T(\mathbf{X})\mathbf{P}(\mathbf{X}) ,$$

siendo \mathbf{F} el gradiente de deformación y $\mathbf{P} = \partial_{\mathbf{F}}W$ el primer tensor de Piola-Kirchhoff. Demostrar que en un cuerpo homogéneo (es decir, que W no depende explícitamente de \mathbf{X}) sobre el que no actúa ninguna fuerza volumétrica el flujo de Σ a través de una superficie cerrada se anula. Encontrar la expresión de este flujo cuando el cuerpo no es homogéneo.

Problema 7.7. Un cubo con aristas de longitud L está colocado en el primer octante con un vértice en el origen de coordenadas cartesianas (X_1, X_2, X_3) y sus caras perpendiculares a los ejes de dicho sistema. Además se sabe que el material del cubo es neohookeano con energía almacenada

$$\bar{W}(\mathbf{C}) = \frac{\kappa}{2} \log^2 J + \frac{\mu}{2} (I_1(\tilde{\mathbf{C}}) - 3)$$

siendo $J = (\det \mathbf{C})^{1/2}$ y $\tilde{\mathbf{C}} = J^{-2/3}\mathbf{C}$. El cubo sufre la deformación

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) = (X_1 + \gamma X_2, X_2, X_3) .$$

Determinar:

- a) El gradiente de deformación, el tensor derecho de Cauchy-Green y los invariantes principales.
- b) El primer y segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.
- c) La tensión sobre la cara que en la configuración de referencia está sobre el plano $X_1 = 0$.

Capítulo 8

Modelos lineales

Las ecuaciones estudiadas hasta ahora son muy generales: por ejemplo, las deformaciones pueden ser de cualquier tamaño y las energías almacenadas pueden ser de cualquier forma (siempre que respeten las condiciones de invariancia, algunos límites, etc.) Esta gran generalidad es lo que explica la utilidad de la Mecánica de Medios Continuos, pues puede usarse para resolver un gran número de problemas prácticos.

La gran desventaja de los modelos y ecuaciones estudiadas hasta el momento es que son muy complicados de resolver y, de hecho, sólo unos pocas soluciones se pueden obtener de manera analítica. Cuando restringimos el ámbito de aplicación de estas teorías, podemos aproximar las ecuaciones resultantes por otras lineales que, aunque imprecisas, se pueden resolver con mucha mayor facilidad.

8.1. Linealización de la cinemática

Definamos, para comenzar una operación $\Sigma : \mathcal{B}_{ref} \rightarrow \mathbb{R}^3$ que transporta puntos desde la configuración de referencia hasta el espacio físico y que está definida, en coordenadas cartesianas, como

$$\mathbf{x} = \Sigma(\mathbf{X}) = (X_1, X_2, X_3) , \quad (8.1)$$

es decir, que $x_i = X_i$. Esta función *embebe* el conjunto \mathcal{B}_{ref} dentro del espacio físico. El gradiente material de esta función es

$$\mathbf{G} = \nabla_{\mathbf{X}} \Sigma(\mathbf{X}) = \frac{\partial \Sigma_i}{\partial X_A} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_A = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_i . \quad (8.2)$$

Empleando la operación Σ tiene sentido definir el *campo de desplazamientos* como la función

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}) - \Sigma(\mathbf{X}) . \quad (8.3)$$

Supongamos ahora que \mathbf{u} tiene un valor y un gradiente que son ambos pequeños, es decir,

$$|\mathbf{u}(\mathbf{X})| = \mathcal{O}(\epsilon) , \quad \|\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}(\mathbf{X})\| = \mathcal{O}(\epsilon) , \quad (8.4)$$

con $\epsilon \ll 1$. Para cualquier función f definida en \mathcal{B}_{ref} se verifica entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X_i} &= \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j} \frac{\partial (u_j + \Sigma_j)}{\partial X_i} \\ &= \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j} \frac{\partial \Sigma_j}{\partial X_i} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j} \delta_{ji} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i} + \mathcal{O}(\epsilon) . \end{aligned} \quad (8.5)$$

Así pues, podemos escribir que en esta situación

$$\nabla_{\mathbf{x}}(f \circ \varphi^{-1}) = \nabla_{\mathbf{X}}f + \mathcal{O}(\epsilon) . \quad (8.6)$$

Si aceptamos aproximaciones de orden ϵ , entonces las derivadas materiales y las espaciales pueden suponerse iguales. En estas simplificaciones hemos empleado la identidad

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{G}(\mathbf{X}) + \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}(\mathbf{X}) . \quad (8.7)$$

Cuando se estudia mecánica de medios continuos con deformaciones pequeñas es habitual quitar los subíndices de los operadores diferenciales y utilizar simplemente $\nabla, \nabla \cdot, \nabla \times$ para el operador gradiente, divergencia y rotacional, respectivamente.

Para desarrollar modelos elásticos será necesario emplear una medida de deformación adecuada al tamaño de \mathbf{F} . Escribimos en primer lugar $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u} = \epsilon\boldsymbol{\beta}$, siendo ahora $\boldsymbol{\beta}$ un tensor tamaño $\mathcal{O}(1)$ para identificar claramente cuáles son los términos pequeños. Así pues, el tensor derecho de Cauchy-Green será

$$\mathbf{C} = (\mathbf{G} + \epsilon\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{G} + \epsilon\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{G} + \epsilon(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \mathbf{G} + 2\nabla^s \mathbf{u} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (8.8)$$

y, por tanto, el tensor de Green-Lagrange será

$$\mathbf{E} = \nabla^s \mathbf{u} + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \quad (8.9)$$

Se define el *tensor de deformación infinitesimal*

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} , \quad (8.10)$$

con lo que

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{B} \approx \mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{G} + 2\mathbf{E} . \quad (8.11)$$

El jacobiano J también se puede linealizar de la siguiente manera:

$$J = \det(\mathbf{G} + \epsilon\boldsymbol{\beta}) = \det(\mathbf{G}) + (J\mathbf{F}^{-T})(\mathbf{G}) : \boldsymbol{\beta}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{u} + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \quad (8.12)$$

8.2. Linealización de la ley de balance de energía

Consideremos ahora un material termoelástico. En este caso, la energía interna se puede escribir de la forma

$$U = \psi(\mathbf{F}, \Theta) - \Theta \frac{\partial \psi}{\partial \Theta}(\mathbf{F}, \Theta), \quad (8.13)$$

siendo Θ la temperatura absoluta y ψ la energía libre. Así pues, la ley de balance de la energía se puede escribir como

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \dot{\mathbf{F}} - \Theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2} \dot{\Theta} - \Theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta \partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q} + R. \quad (8.14)$$

Usando la definición del primer tensor de Piola-Kirchhoff los términos de la tensión se cancelan y queda

$$-\Theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2} \dot{\Theta} = \Theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta \partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} - \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{Q} + R. \quad (8.15)$$

Supongamos ahora que el cuerpo está sometido a fuerzas exteriores y aportes de calor muy pequeños. Entonces, la deformación y la temperatura serán de la forma

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{u} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad \Theta = \Theta_0 + \vartheta + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (8.16)$$

con \mathbf{u} y ϑ campos de orden ϵ . Entonces la ecuación del balance de energía se simplifica a

$$c_0 \dot{\vartheta} = \mathbf{M}_0 : \nabla \dot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \mathbf{Q} + R, \quad (8.17)$$

siendo

$$c_0 = -\Theta_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2}(\mathbf{G}, \Theta_0), \quad \mathbf{M}_0 = \Theta_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta \partial \mathbf{F}}(\mathbf{G}, \Theta_0) \quad (8.18)$$

que se conocen como la *capacidad térmica* y el *tensor de acoplamiento termoelástico*. Supongamos además que el flujo de calor sea proporcional al gradiente de temperatura y escribamos, según la ley de Fourier,

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{K} \nabla \vartheta, \quad (8.19)$$

donde \mathbf{K} es el *tensor de conductividad térmica*. Si además suponemos que el cuerpo no se puede deformar en absoluto la ecuación de balance de energía queda

$$c_0 \dot{\vartheta} = -\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \vartheta) + R, \quad (8.20)$$

que es la ecuación clásica del problema de *conducción de calor*. De hecho, para definir el problema completamente hay que complementarlo con condiciones de contorno en el campo de temperatura y en el de flujo de calor, y con condiciones iniciales para ϑ .

8.3. Linealización de la ley de balance de cantidad de movimiento

Para linealizar la ecuación del balance de cantidad de movimiento empezamos linealizando el primer tensor de Piola-Kirchhoff, a saber,

$$\mathbf{P} = J(\mathbf{G} + \epsilon\boldsymbol{\beta})\mathbf{F}^{-T}\boldsymbol{\sigma} = (1 + \epsilon\boldsymbol{\beta})(\mathbf{G} + \epsilon\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(1 + \mathcal{O}(\epsilon)) . \quad (8.21)$$

Por tanto, si las fuerzas exteriores volumétricas \mathbf{B} y de superficie \mathbf{T} son pequeñas, esperamos que la deformación sea pequeña y se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \rho_{ref}\mathbf{B} - \rho_{ref}\mathbf{A} \\ &= \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\boldsymbol{\sigma}(1 + \mathcal{O}(\epsilon))) + \rho_{ref}\mathbf{B} - \rho_{ref}\mathbf{A} \\ &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_{ref}\mathbf{B} - \rho_{ref}\mathbf{A} + \mathcal{O}(\epsilon) . \end{aligned} \quad (8.22)$$

En la teoría clásica de medios deformables, incluyendo la teoría de elasticidad, se ignoran todos los términos de orden ϵ y se define $\rho = \rho_{ref}$, quedando la ecuación del balance de cantidad de movimiento de la forma

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{B} = \rho\mathbf{A} . \quad (8.23)$$

Apéndice A

Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas de cualquier punto en \mathbb{R}^3 se puede expresar en un sistema cilíndrico. Las coordenadas de este sistema se indican con la terna $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ y están relacionadas con las coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) según

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \quad z = x_3, \quad (\text{A.1})$$

y su relación inversa

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = z. \quad (\text{A.2})$$

Como no es un cambio de coordenadas biyectivo pueden aparecer problemas cuando $r = 0$. A diferencia de los sistemas cartesianos, la base de vectores en coordenadas cilíndricas depende del punto. Estos vectores son tangentes a las curvas coordenadas en las que dos de las coordenadas se mantienen constantes y la tercera varía. Si se define una curva en \mathbb{R}^3 como $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta, z)$, se pueden calcular los vectores unitarios tangentes a estas curvas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \right|^{-1} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right|^{-1} = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_z &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \right|^{-1} = \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Como $\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right| = r$, el vector \mathbf{e}_θ no está bien definido en la recta $r = 0$. Lejos de ella, la matriz de cambio de base y su inversa son, respectivamente,

$$[A_{cil}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [A_{cil}^{-1}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Nótese que la matriz $[A_{cil}]$ es una rotación así pues su inversa es igual a su traspuesta. Además, la base de vectores $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ es ortonormal.

A.1. Elementos de integración

El diferencial del vector de posición de un punto cualquiera de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) es el vector

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} dz \\ &= (\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2) dr + (-r \sin \theta \mathbf{e}_1 + r \cos \theta \mathbf{e}_2) d\theta + \mathbf{e}_3 dz . \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Empleando la matriz de cambio de base $[A_{cil}]$ podemos expresar este vector en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \{d\mathbf{x}\}_{cil} &= [A_{cil}]\{d\mathbf{x}\}_{car} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \\ dz \end{array} \right\}_{car} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} dr \\ r d\theta \\ dz \end{array} \right\}_{cil} . \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Expresado de otra manera,

$$d\mathbf{x} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z . \quad (\text{A.7})$$

El diferencial de arco en cilíndricas se calcula empleando la definición

$$ds = (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^{1/2} = (dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2)^{1/2} . \quad (\text{A.8})$$

Siguiendo también su definición, el elemento diferencial de volumen se calcula como

$$dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial z} \end{vmatrix} dr d\theta dz = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dr d\theta dz = r dr d\theta dz . \quad (\text{A.9})$$

A.2. Operador gradiente

Si $f = f(\mathbf{x})$ es un campo escalar diferenciable, su diferencial es

$$df(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz . \quad (\text{A.10})$$

Este diferencial se puede reescribir como

$$df(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z) = \nabla f \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{A.11})$$

siendo por tanto el gradiente en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z . \quad (\text{A.12})$$

Para calcular el gradiente de un campo vectorial definido en coordenadas cilíndricas, empleamos su definición intrínseca (1.83), para lo cual usamos las identidades

$$d\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta d\theta , \quad d\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r dr , \quad d\mathbf{e}_z = 0 . \quad (\text{A.13})$$

Si $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \theta, z)$ es un campo vectorial de la forma $\mathbf{v} = v_r(r, \theta, z)\mathbf{e}_r + v_\theta(r, \theta, z)\mathbf{e}_\theta + v_z(r, \theta, z)\mathbf{e}_z$, su diferencial es

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} &= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} dr + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial v_r}{\partial z} dz \right) \mathbf{e}_r + v_r d\mathbf{e}_r \\ &\quad + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} dr + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} dz \right) \mathbf{e}_\theta + v_\theta d\mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} dr + \frac{\partial v_z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) \mathbf{e}_z + v_z d\mathbf{e}_z \\ &= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial r} \mathbf{e}_z \right) dr \\ &\quad + \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - v_r \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \right) r d\theta \\ &\quad + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) dz \\ &= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial r} \mathbf{e}_z \right) \otimes \mathbf{e}_r \cdot dr \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - v_r \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \right) \otimes \mathbf{e}_\theta \cdot r d\theta \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \otimes dz \mathbf{e}_z \\ &= \nabla \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} , \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

donde se puede identificar por tanto el gradiente

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial r} \mathbf{e}_z \right) \otimes \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - v_r \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \right) \otimes \mathbf{e}_\theta \quad (\text{A.15}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \otimes \mathbf{e}_z . \end{aligned}$$

De forma más compacta, el gradiente de un campo vectorial en coordenadas cilíndricas se puede escribir como:

$$[\nabla \mathbf{v}] = \begin{bmatrix} v_{r,r} & \frac{v_{r,\theta} - v_\theta}{r} & v_{r,z} \\ v_{\theta,r} & \frac{v_r + v_{\theta,\theta}}{r} & v_{\theta,z} \\ v_{z,r} & \frac{v_{z,\theta}}{r} & v_{z,z} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

A.3. Operador divergencia

Si $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \theta, z)$ es un campo vectorial con componentes v_r, v_θ, v_z , su divergencia es el campo escalar

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{tr}(\nabla \mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (\text{A.17})$$

Si $\mathbf{T} = \mathbf{T}(r, \theta, z)$ es un campo tensorial con componentes $T_{rr}, T_{r\theta}, \dots$, su divergencia es el campo vectorial

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &= \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + (T_{rr} - T_{\theta\theta}) \right) + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \left(\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + (T_{r\theta} + T_{\theta r}) \right) + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + T_{rz} \right) + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

A.4. Tensor de deformación infinitesimal

El tensor de deformación infinitesimal se obtiene simetrizando el operador gradiente y resulta, en coordenadas cilíndricas:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} u_{r,r} & \frac{1}{2} \left(\frac{u_{r,\theta}}{r} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{2} (u_{r,z} + u_{z,r}) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{u_{r,\theta}}{r} + u_{\theta,r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta,\theta}}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{u_{z,\theta}}{r} + u_{\theta,z} \right) \\ \frac{1}{2} (u_{r,z} + u_{z,r}) & \frac{1}{2} \left(\frac{u_{z,\theta}}{r} + u_{\theta,z} \right) & u_{z,z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

A.5. Problemas axisimétricos

Los problemas axisimétricos son aquellos en los que se puede escoger una dirección de simetría de revolución, tanto para las cargas como para la geometría. En este caso, y escogiendo un sistema de coordenadas cilíndricas con el eje z que coincida con el de revolución se tiene que el campo de desplazamiento será de la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, z) = u_r(r, z) \mathbf{e}_r + u_z(r, z) \mathbf{e}_z, \quad (\text{A.20})$$

con lo que el cálculo de todos los operadores diferenciales se simplifica.

Apéndice B

Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas de un punto en el espacio Euclídeo son $(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \pi) \times [-\pi, \pi)$ cuya relación con las coordenadas cartesianas es:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}, \quad \phi = \arctan \frac{x_2}{x_1}. \quad (\text{B.1})$$

La relación inversa es por tanto

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = r \cos \theta. \quad (\text{B.2})$$

Al igual que ocurre con las coordenadas cilíndricas, la relación entre las coordenadas esféricas y las cartesianas tiene singularidades, como veremos después. Los vectores de la base en coordenadas esféricas son

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \right|^{-1} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right|^{-1} = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 - \sin \theta \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \right|^{-1} = -\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

y por lo tanto la matriz de transformación de coordenadas y su inversa son:

$$\begin{aligned} [A_{esf}] &= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix}, \\ [A_{esf}^{-1}] &= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

La matriz A es ortonormal y su inversa es igual a su transpuesta.

B.1. Elementos de integración

El diferencial de un vector de posición en un punto arbitrario (r, θ, ψ) es

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} d\phi \\ &= (\sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3) dr \\ &\quad + (r \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_1 + r \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_2 - r \sin \theta \mathbf{e}_3) d\theta \\ &\quad + (-r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_1 + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_2) d\phi . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Tal y como está calculado, las componentes de este diferencial, aunque función de (r, θ, ϕ) , son las componentes en la base cartesiana pues multiplican a los vectores de esta base. Para encontrar las componentes del diferencial de posición en coordenadas esféricas simplemente utilizamos la expresión para el cambio de base de componentes de un vector

$$\begin{aligned} \{d\mathbf{x}\}_{esf} &= [A_{esf}] \{d\mathbf{x}\}_{car} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi \\ \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{cases} \\ &= \begin{cases} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\phi \end{cases}_{esf} . \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Este resultado se puede escribir de manera equivalente como

$$d\mathbf{x} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi . \quad (\text{B.7})$$

Usando la definición del diferencial de arco se sigue que este tiene por expresión, en coordenadas esféricas,

$$ds = (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^{1/2} = (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2)^{1/2} . \quad (\text{B.8})$$

Empleando ahora la definición del elemento diferencial de volumen obtenemos

$$\begin{aligned} dv &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & \frac{\partial x_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial x_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial x_3}{\partial \phi} \end{vmatrix} dr d\theta d\phi \\ &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} dr d\theta d\phi \\ &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi . \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

B.2. Operador gradiente

Para encontrar la expresión del operador gradiente en coordenadas esféricas estudiamos una función $f = f(\mathbf{x})$ diferenciable. Como se acaba de indicar, su diferencial es

$$df(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi. \quad (\text{B.10})$$

Reescribiendo este diferencial de la siguiente manera

$$df(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \right) \cdot (\mathbf{e}_r + r \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta \mathbf{e}_\phi) = \nabla f \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{B.11})$$

se puede identificar el vector gradient como

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi. \quad (\text{B.12})$$

La extensión de esta definición al gradiente de un campo vectorial utilizamos su definición intrínseca. Pare ello, comenzamos por calcular los diferenciales de los vectores de la base esférica. Así, si escribimos

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{Bmatrix} = [A_{esf}] \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

podemos calcular el diferencial

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} d\mathbf{e}_r \\ d\mathbf{e}_\theta \\ d\mathbf{e}_\phi \end{Bmatrix} &= \left(\left[\frac{\partial A_{esf}}{\partial r} \right] dr + \left[\frac{\partial A_{esf}}{\partial \theta} \right] d\theta + \left[\frac{\partial A_{esf}}{\partial \phi} \right] d\phi \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{Bmatrix} \\ &= \left(\left[\frac{\partial A_{esf}}{\partial r} \right] dr + \left[\frac{\partial A_{esf}}{\partial \theta} \right] d\theta + \left[\frac{\partial A_{esf}}{\partial \phi} \right] d\phi \right) [A_{esf}^{-1}] \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Realizando estas operaciones se obtiene que

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_r &= d\theta \mathbf{e}_\theta + \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi \\ d\mathbf{e}_\theta &= -d\theta \mathbf{e}_r + \cos \theta d\phi \mathbf{e}_\phi \\ d\mathbf{e}_\phi &= -\sin \theta d\phi \mathbf{e}_r - \cos \theta d\phi \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Así pues, si $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \theta, \phi)$ es un campo vectorial cuya expresión en coordenadas esféricas es $\mathbf{v} = v_r(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_r + v_\theta(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\theta + v_\phi(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\phi$, su diferencial

se podrá calcular como:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{v} &= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} dr + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial v_r}{\partial \phi} d\phi \right) \mathbf{e}_r + v_r d\mathbf{e}_r \\
&+ \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} dr + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} d\phi \right) \mathbf{e}_\theta + v_\theta d\mathbf{e}_\theta \\
&+ \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} dr + \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} d\phi \right) \mathbf{e}_\phi + v_\phi d\mathbf{e}_\phi \\
&= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \mathbf{e}_\phi \right) dr \\
&+ \left(\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\phi \right) d\theta \\
&+ \left(\left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \sin \theta \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi \cos \theta \right) \mathbf{e}_\theta \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \right) \mathbf{e}_\phi \right) d\phi \\
&= \nabla \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} ,
\end{aligned} \tag{B.16}$$

por lo que se puede identificar el tensor gradiente como aquel con expresión

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \mathbf{e}_\phi \right) \otimes \mathbf{e}_r \\
&+ \frac{1}{r} \left(\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\phi \right) \otimes \mathbf{e}_\theta \\
&+ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \sin \theta \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi \cos \theta \right) \mathbf{e}_\theta \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \right) \mathbf{e}_\phi \right) \otimes \mathbf{e}_\phi .
\end{aligned} \tag{B.17}$$

B.3. Operador divergencia

Para hallar la expresión de la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{v}(r, \theta, \psi)$ empleamos también la definición $\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{tr}(\nabla \mathbf{v})$ y se obtiene el campo escalar

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} . \tag{B.18}$$

De manera análoga, si $\mathbf{T}(r, \theta, \phi)$ es un campo tensorial, la expresión de su divergencia se puede calcular usando la relación $(\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot (\mathbf{T}^T \mathbf{a})$, donde \mathbf{a} es un vector constante.

Índice alfabético

- aceleración espacial, 62
- aceleración material, 62
- adjunto de un tensor, 14
- alargamiento, 57
- alargamiento derecho, 49
- alargamiento izquierdo, 49
- alargamientos principales, 49
- autovalor, 15
- autovector, 15

- barotrópico, 130
- base, 3
- base principal, 15

- campo de desplazamiento, 59
- campo de desplazamientos, 157
- campo de vorticidad, 64
- campo espacial, 61
- campo material, 61
- cantidad de movimiento, 94
- capacidad térmica, 159
- circulación, 126
- Clausius-Planck, 106
- componentes, 3
- componentes de un tensor, 10
- componentes intrínsecas, 78
- conducción de calor, 159
- configuración, 43
- configuración actual, 61
- configuración de referencia, 43
- configuración indeformada, 43
- configuración inicial, 61
- conjuntos de control, 89
- convenio de Einstein, 23

- coordenadas, 1
- coordenadas materiales, 43
- corolario de Cauchy, 76
- cortante puro, 79
- cuasi estáticos, 144
- cuerpo continuo, 42
- curva, 2
- curva material, 85
- cálculo variacional, 29

- de Levi-Civita., 25
- deformaciones de sólido rígido, 56
- deformaciones homogéneas, 57
- deformación, 43
- deformación infinitesimal, 58, 59
- delta de Kronecker, 4
- densidad, 89
- densidad de producción entrópica, 106
- densidad de referencia, 90
- derivada temporal material, 62
- desigualdad de Clausius-Duhem, 105
- desplazamientos, 45
- determinante de un tensor, 14
- diferencial de una función, 20
- divergencia, 21

- ecuaciones constitutivas, 113
- ecuaciones de Euler, 128
- ecuación calórica, 134
- ecuación de continuidad, 91
- ecuación de estado, 134
- ecuación de Euler-Lagrange, 30

- Elástico:, 120
 energía, 102
 energía cinética, 99
 energía interna, 102
 energía potencial, 149
 entropía, 104
 espaciales, 45
 estacionario, 125
 estrictamente convexa, 28

 fluido de Reiner-Rivlin, 135
 fluido perfecto, 127
 fluidos newtonianos, 131
 Fluidos:, 120
 flujo de calor, 101
 forma débil, 150
 fuerza de contacto, 94
 fuerzas de superficie, 74
 fuerzas internas, 74
 fuerzas máscas, 94
 fuerzas volumétricas, 73
 funcional, 30
 función convexa, 28
 función de energía almacenada, 144
 función de energía interna, 144
 fórmula de Nanson, 55

 gradiente, 20
 gradiente de deformación, 47
 gradiente de un campo vectorial, 21
 gradiente de velocidad, 64
 Green-Lagrange, 51

 identidad $\delta - \varepsilon$, 25
 incompresibilidad, 92
 invariancia respecto al observador, 116
 invariancia respecto al observador, 116
 invariantes principales, 15
 irrotacional, 125
 isocórica, 92
 isotropa, 119
 isotropo, 145

 lema fundamental del cálculo variacional, 29
 linealización, 31
 línea de corriente, 124
 línea de vorticidad, 126

 material elástico, 143
 material hiperelástico, 144
 materiales, 45
 matriz tangente, 32
 modelo neohookeano, 146
 movimiento, 61
 movimientos equivalentes, 116
 métrica, 4

 nominales, 76
 norma de un tensor, 14
 norma Euclídea, 5
 notación indicial, 23

 operaciones vectoriales, 4
 operación intrínseca, 5
 ortogonal, 12

 partícula, 44
 Plástico:, 120
 posición, 44
 potencia calorífica, 101
 potencia mecánica, 99
 potencia tensional, 99
 potencia térmica, 101
 presión, 74, 78, 79, 128, 131, 148
 presión hidrostática, 131
 primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, 76
 principio de Cauchy, 75
 principio de conservación de masa, 89
 principio de la mínima energía potencial, 149
 principio de objetividad material, 116
 principio de Pascal, 135
 producto diádico, 12

- producto diádico de tensores de segundo orden, 19
- producto escalar, 4
- producto escalar entre tensores, 13
- producto exterior, 12
- producto mixto, 7
- producto vectorial, 6

- reflexión, 12
- rotacional, 21
- rotaciones puras, 57
- rotación, 12, 49
- rotación infinitesimal, 59

- segundo tensor de Piola-Kirchhoff, 79
- superficie, 2
- superficie material, 86
- Sólido:, 120

- tasa de deformación, 64
- temperatura absoluta, 104
- temperatura empírica, 104
- tensiones tangenciales o cortantes, 77
- tensión, 73, 74
- tensión hidrostática, 79
- tensión homogénea, 79
- tensión normal, 77
- tensión o compresión pura, 79
- tensor
 - antisimétrico, 11
 - antisimétrico asociado a un vector, 11
 - cilíndrico, 16
 - definido positivo, 11
 - desviador, 13
 - esférico, 13, 16
 - identidad, 11
 - inverso, 14
 - nulo, 11
 - ortogonal, 14
 - regular, 14
 - rotación, 14
 - semidefinido positivo, 11
 - simétrico, 11
 - singular, 14
 - transpuesto, 11
- tensor de acoplamiento termo-elástico, 159
- tensor de Almansi, 51
- tensor de conductividad térmica, 159
- tensor de cuarto orden, 19
- tensor de deformación de Hencky, 52
- tensor de deformación de Piola, 51
- tensor de deformación infinitesimal, 158
- tensor de Finger, 50
- tensor de permutación, 25
- tensor de rotación propia, 64
- tensor de spin, 64, 125
- tensor de tensiones de Cauchy, 75
- tensor de tensiones verdaderas, 75
- tensor derecho de Cauchy-Green, 50
- tensor izquierdo de Cauchy-Green, 50
- tensores de dos puntos, 19
- tensores de segundo orden, 9
- tensores espaciales, 51
- tensores materiales, 51
- teorema de Bernoulli, 129
- Teorema de Cauchy, 75
- Teorema de Gauss, 22
- teorema de Stokes, 22
- transformada de Legendre, 28
- transporte, 45
- traslaciones rígidas, 57
- trayectoria, 61, 124
- traza de un tensor, 13
- triple producto, 7
- tubo de corriente, 124
- tubo de vorticidad, 126

- variación, 149
- vector, 2
- vector axial, 11

- vector de tensión de Cauchy, 75
- vector de tensión de Piola-Kirchhoff, 75
- vector de tensión nominal, 75
- vector de tensión verdadera, 75
- vector unitario, 5
- velocidad espacial, 62
- velocidad material, 62
- Viscoelástico:, 120
- Viscoplástico:, 120
- volumen, 2
- volumen material, 86
- vorticidad, 125