Equilibrio

I. Romero
ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid
ignacio.romero@upm.es

30 de agosto de 2017

En este tema se estudia el equilibrio de una clase de cuerpos, los prismáticos, que son el objeto de estudio de la Resistencia de Materiales. Después de describir específicamente cómo son estos cuerpos, se analizan las condiciones de equilibrio estático y se introducen los conceptos de fuerza y momentos internos. Estos dos conceptos son centrales en el estudio mecánico de piezas y estructuras y se definen expresiones y símbolos gráficos para poder describir de manera inequívoca su valor en todo punto de un cuerpo.

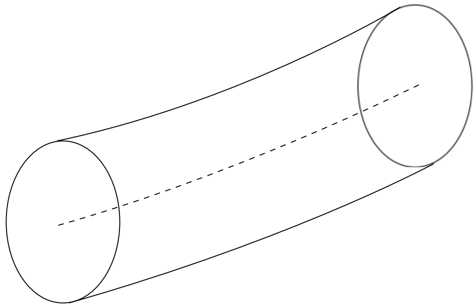

Figura 1: Un sólido prismático generado por una sección recta circular.

1. Los sólidos prismáticos

El objeto de la mecánica de sólidos es el estudio de la transmisión de fuerzas, de la deformación y de la resistencia de los cuerpos deformables. Para alcanzar estos objetivos, la mecánica de sólido emplea ecuaciones en derivadas parciales cuya solución aproximada sólo es posible mediante ordenadores. Existen, sin embargo, algunos sólidos deformables "sencillos" que se pueden analizar fácilmente, sin necesidad de programas de cálculo, como han hecho los ingenieros durante casi 200 años. Estos sólidos sencillos son las vigas, las placas, las láminas y las membranas, aunque en este curso nos limitamos al estudio de las primeras.

Una viga es un sólido deformable con una dimensión mucho más grande que las otras dos. Desde el punto de vista geométrico, una viga se puede describir como un sólidos prismático, es decir, generado por una sección recta rígida cuyo centro recorre una curva que llamamos generatriz. Este tipo de cuerpos es, a pesar de su sencillez, extremadamente común en máquinas, estructuras, incluso en la naturaleza.

Uno de los objetivos básicos de la Resistencia de Materiales (y de todos los métodos de análisis basados en ésta) es la determinación, para cualquier valor de las solicitaciones exteriores, la posición, o mejor dicho, la variación de la posición de todas las secciones transversales de una viga. Como las secciones son rígidas, su desplazamiento viene dado por un vector que indica cuánto cambia la posición de su centro de área y un vector que refleja su giro relativo. Esto significa que las secciones transversales de las vigas tridimensionales tienen 6 ***grados de libertad*** (3 desplazamientos, 3 giros) y en las vigas de problemas plano, 3 (dos desplazamientos y un giro alrededor del eje normal al plano de la estructura).

Como consecuencia de la definición geométrica de un sólido prismático, en cualquiera de sus secciones (perpendiculares a la generatriz) se puede definir un triedo ortonormal. En estos apuntes utilizaremos la convención de que el eje x de este triedro coincide con la normal saliente. Los ejes y, z son direcciones principales de la sección transversal y junto con x definen un triedro dextrógiro. La figura 2 ilustra esta construcción.

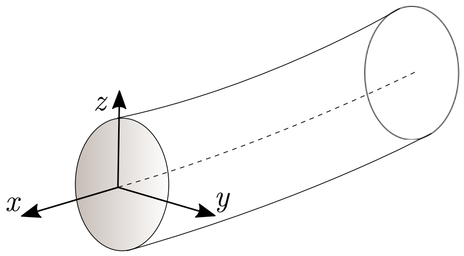

Figura 2: Triedro intrínseco definido en una sección cualquiera de un sólido prismático.

2. Equilibrio

Un cuerpo se encuentra en ***equilibrio estático*** si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él y su momento resultante con respecto a cualquier punto son ambos nulos. Si las fuerzas y los momentos que actúan sobre el cuerpo se denotan como $\{\boldsymbol{F}_i\}_{i=1}^{N_f}$ y $\{\boldsymbol{M}_i\}_{i=1}^{N_m}$ entonces las condiciones de equilibrio estático son

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_f} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} \ , \\ \sum_{i=1}^{N_f} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_{i=1}^{N_m} \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{0} \ , \end{aligned} \tag{1}$$

siendo $\boldsymbol{r}_i$ el vector de posición de la fuerza $\boldsymbol{F}_i$ respecto de un punto *cualquiera*.

La condición de equilibrio estático se estudia en Mecánica Clásica y deriva de las ecuaciones de Newton y Euler. En cuerpos deformables sin embargo es necesario extender su enunciado para afirmar que un sólido deformable está en equilibrio estático sin *todo él y cualquiera de sus partes* satisfacen las ecuaciones 1.

Observaciones:

a) En un problema tridimensional hay 6 ecuaciones de equilibrio. En un problema plano, sólo 2.

b) Si se plantea la ecuación de equilibrio de momentos (de un cuerpo o una parte de éste) en más de un punto parece que se consiguen más ecuaciones, pero en realidad las nuevas ecuaciones son linealmente dependientes de las primeras.

c) La extensión del equilibrio a cualquiera de las regiones de un sólido, finitas o infinitesimales, se puede razonar de manera abstracta al intentar explicar por qué ninguna región de un sólido en equilibrio se mueve. De manera más "física" se puede derivar este resultado si se contempla la naturaleza atómica de un cuerpo y se estudian las fuerzas entre dos subconjuntos de átomos de un mismo cuerpo.

d) Las fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo incluyen las reacciones de sus apoyos. Ver la sección 6.

3. Esfuerzos

Si en un cuerpo deformable separamos una región cualquiera, es posible que las fuerzas y momentos exteriores que actúan sobre ella no estén en equilibrio estático. Como esta región ha de estar en equilibrio concluimos que la parte del cuerpo que no estamos considerando debe de ejercer algún tipo de fuerzas y momentos sobre la región considerada. Se llaman ***fuerzas y momentos internos*** los ejercidos por la parte del cuerpo que no se considera sobre la sección transversal en donde lo hemos separado. Estas fuerzas no se pueden medir de manera directa porque se ejercen sobre una sección interior al cuerpo, que sólo vemos porque hemos imaginado que separamos el cuerpo. Sin embargo, han de existir pues si no existieran la parte separada podría acelerarse.

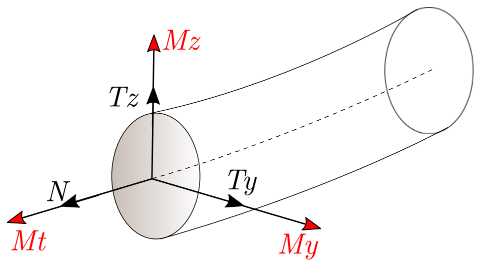

Figura 3: Esfuerzos sobre una sección transversal de un sólido prismático.

Las fuerzas y momentos internos sobre una sección transversal pueden tener cualquier módulo y dirección. Al ser ambas cantidades vectoriales, se pueden calcular sus respectivas componentes en cualquier base. En particular, las componentes de las fuerzas y momentos internos sobre un sección expresados en el triedro intrínseco de la misma se llaman los ***esfuerzos***. En una viga habrá por tanto 6 esfuerzos: las componentes de la fuerza interna según los ejes x, y y z se conocen respectivamente como el ***esfuerzo normal*** (N) y los ***esfuerzos cortantes*** en dirección de y y z (T_y, T_z). Por su parte, las tres componentes del momento interno en el triedro intrínseco son el ***momento torsor*** (M_t) y los ***momentos flectores*** según y y z (M_y, M_z).

4. Condiciones de ligadura

Cuando dos vigas se sueldan, las partes transmiten a través de la unión soldada todos los esfuerzos posibles (fuerzas y momentos). Existen ligaduras entre vigas que no transmiten todos los esfuerzos sino que anulan uno, varios, o alguna combinación entre ellos. Este tipo de uniones se conocen como ***libertades*** y aportan ecuaciones adicionales a las del equilibrio que permiten analizar la estática de la pieza o estructura.

Una libertad que anula el esfuerzo normal que se transmite a través de una sección se conoce como ***deslizadera***. Otra que anula el momento flector, bien ***rótula*** o ***articulación***. Además hay otras libertades para las que no existen nombres estandard, como aquella que anula el cortante, o la que anula la fuerza en dirección de una barra.

5. Sustentaciones

Cada sección de una viga tiene 6 grados de libertad (3 en problemas planos) y por tanto cuando se aplica fuerzas a una estructura o pieza, cada sección se desplaza pudiendo modificarse uno o más de estos grados de libertad. Existen maneras de impedir estos desplazamientos y se llama ***sustentación*** a cualquier sujeción que restringe el valor de uno o más grados de libertad. Cuando una sustentación limita un grado de libertad es que es capaz de crear una fuerza o momento que es responsable de que aquel sea cero. Estas fuerzas/momentos se conocen como ***reacciones***.

Hay tantos tipos de sustentaciones como combinaciones posibles de restricciones sobre una sección. Limitándonos al caso plano, sólo hay tres grados de libertad en una sección y por tanto el número posible de sustentaciones es menor. La restricción más común es el ***apoyo simple*** que restringe los dos desplazamientos de una sección, aunque no su giro. En la figura 4 se puede apreciar el símbolo que se emplea habitualmente para representar esta restricción y una foto de un apoyo real. Como se restringen dos desplazamientos, el apoyo tiene dos reacciones.

El segundo tipo de sustentación es el ***apoyo móvil***. En este caso, la restricción que se impone es que el desplazamiento perpendicular a la superficie de apoyo sea nulo. En la figura 5 se pueden apreciar dos casos de apoyos móviles. El tercer caso más común de sustentación es el llamado ***empotramiento***. Esta sustentación restringe todos los grados de libertad, es decir desplazamientos y giro, de la superficie sujeta. En la figura 6 se puede observar un caso real de ese tipo de restricción y el símbolo que se emplea para representarlo.

Existen más tipos de opoyos que restringen combinaciones específicas de restricciones en problemas planos o tridimensionales. En todos los casos los esquemas de símbolos deben de comunicar de forma unívoca qué grados de libertad son los restringidos.

6. Cálculo de reacciones y esfuerzos

Todos los problemas de Resistencia de Materiales comienzan con un estudio de las condiciones de equilibrio en la pieza. En la mayoría de los casos, se necesita conocer las reacciones y todos los esfuerzos en todas los sólidos.

Las reacciones sobre una estructura se pueden calcular, en muchos casos, empleando las condiciones de equilibrio estático sobre toda ésta, y las ecuaciones adicionales proporciona-

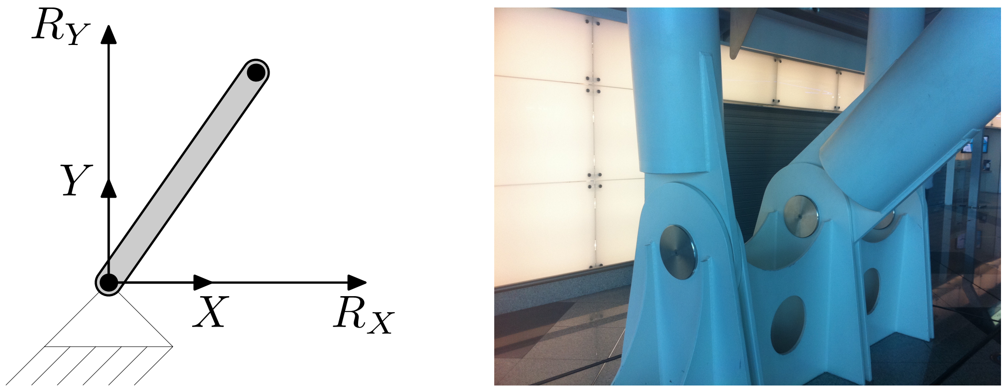

Figura 4: Apoyo simple: esquema y foto.

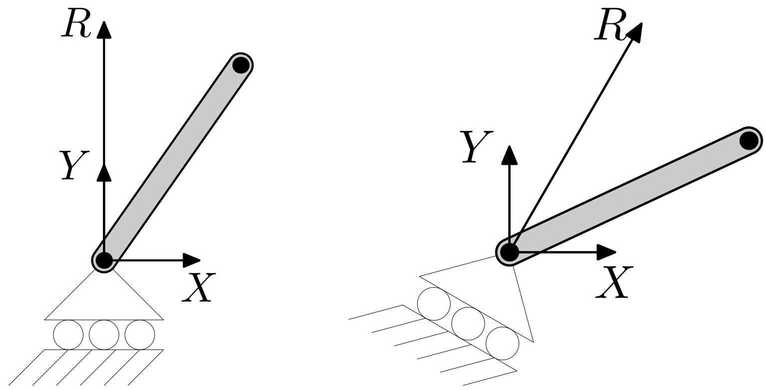

Figura 5: Esquema de apoyos móviles.

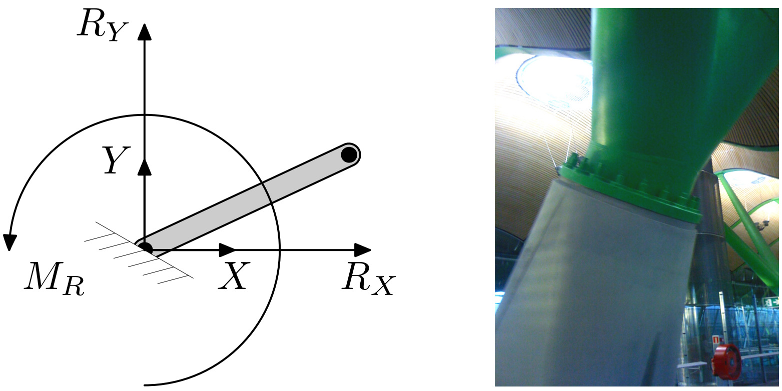

Figura 6: Empotramiento: esquema y foto.

das por las libertades. En el caso de los esfuerzos, estos se obtienen a partir de las mismas ecuaciones, pero cuando se separa un sólido por aquella superficie en donde se desean conocer los esfuerzos.

En algunos casos, las ecuaciones de la estática y las de las libertades son suficientes para calcular tanto reacciones como esfuerzos en cualquier sección transversal de cualquier parte de la estructura y se dice que ésta es ***isostática***. Cuando no es posible (porque hay demasiadas incógnitas — reacciones o esfuerzos — e insuficientes ecuaciones) se dice que la estructura es ***hiperestática***, siendo el exceso de incógnitas el ***grado de hiperestaticidad*** o de ***indeterminación estática*** de la misma.

El grado de hiperestaticidad es una propiedad de la estructura, no de sus cargas, y depende de sus apoyos y de cómo estén conectadas sus elementos. De forma un poco intuitiva se puede decir que el exceso de apoyos (más de 6 en el caso tridimensional ó 3 en el plano) genera una hiperestaticidad externa. Además, las celdas cerradas de barras o vigas aumentan el número de incógnitas y por tanto son responsables de una hiperestaticidad interna.

Para una estructura o pieza plana el grado de hiperestaticidad se puede calcular usando la expresión

$$NH = NR - 3 + 3 \times NC - NL,$$

siendo NR el número de reacciones, NC el número de celdas cerradas y NL el número de libertades. Esta fórmula proporciona una condición *necesaria*, pero no suficiente, que debe emplearse con cautela porque sólo es válida cuando el sólido no tiene movimientos de mecanismo. En este caso la expresión anterior puede dar resultados ilógicos.

7. Leyes y diagramas de esfuerzos

En el análisis de estructuras es necesario comunicar el valor de los esfuerzos en cada sección y, a menudo, expresarlos matemáticamente de alguna manera para poder calcular con ellos u obtener información adicional.

El sentido de los esfuerzos. No es igual un esfuerzo axial que "sale" de la sección que otro que "entra". De la misma manera, el esfuerzo cortante puede ser de tal manera que las fuerzas internas den un par horario, o bien antihorario. Por último, los momentos internos pueden aplastar las fibras superiores o las inferiores de la sección. Para distinguir los dos casos posibles orientar cada esfuerzo, se emplean símbolos que indican gráficamente la orientación de las fuerzas y momentos internos. Estos símbolos deben de *acompañar en todo momento los valores numéricos de los esfuerzos*, para que no haya duda de cómo son éstos. En la figura 7 se dibujan los tres esfuerzos posibles en un problema plano y los sentidos de cada uno de ellos.

Diagramas de esfuerzos. Éstos son representaciones *gráficas* que comunican *el módulo y el sentido* de todos los esfuerzos en todas las secciones de una estructura sometida a cargas de forma inequívoca. Para que cumplan su objetivo, todo diagrama debe de ir acompañado de los símbolos que indiquen la orientación de los esfuerzos en cada sección.

Leyes de esfuerzos. Son representaciones matemáticas de las fuerzas y momentos internos en un sólido prismático. Deben de proporcionar, de forma inequívoca, el valor de cada esfuerzo en todas las secciones transversales del sólido. Como son funciones matemáticas, las leyes de esfuerzo sólo se pueden definir para sólidos o partes de ellos, en los que la posición de la sección transversal esté claramente determinada por un sistema de coordenadas, que en estas notas indicaremos como X. Además, para cada uno de estos sólidos o sus partes, un diagrama de signos ha de describir qué se entiende por esfuerzos positivos y negativos.

A menudo las leyes de esfuerzos no se pueden expresar matemáticamente con una función diferenciable, sino que es necesario emplear funciones definidas a trozos. Para facilitar la descripción de este tipo de funciones se emplea la *función rampa*, también llamado el *corchete de Macaulay.*

El corchete de Macaulay. La función $\langle\cdot\rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \ . \end{cases} \tag{2}$$

Ejemplo 1. La ley de momentos flectores de la viga de la figura 8 se puede escribir como:

$$M(X) = \begin{cases} \frac{P}{2} X & \text{si } 0 \leq X \leq L/2 \\ \frac{P}{2}(L - X) & \text{si } l/2 \leq X \leq L \ , \end{cases} \tag{3}$$

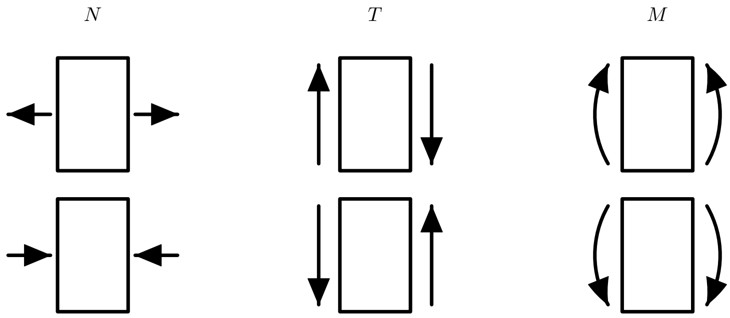

Figura 7: Los tres esfuerzos sobre una sección (normal N, cortante T y flector M) y sus dos sentidos posibles.

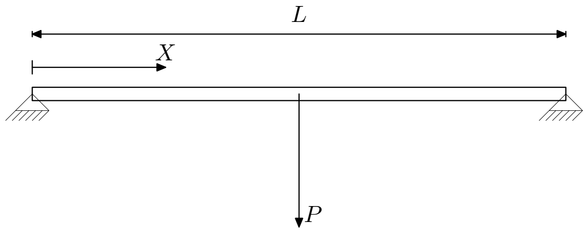

Figura 8: Ejemplo 1.

o también simplemente como

$$M(X) = \frac{P}{2}\langle X\rangle - P\langle X - L/2\rangle \ . \qquad (4)$$

En esta expresión, y más abajo, se ha supuesto que el momento flector es positivo cuando está como en la línea superior de la figura 7. Aunque el signo asociado al sentido de un esfuerzo es totalmente arbitrario, es necesario declarar como positivo o negativo el considerado *cuando éste se desea expresar analíticamente.*

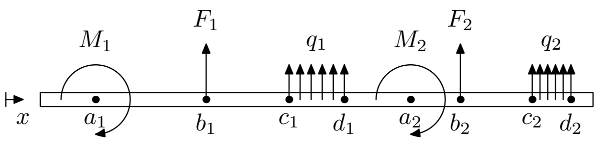

Figura 9: Carga general sobre una viga recta

Expresión general de las leyes de cortantes y momentos en un tramo de viga. Consideremos finalmente el caso general de una viga recta sometida a N_p cargas puntuales, N_m momentos concentrados y N_q cargas distribuidas constantes y perpendiculares a la generatriz tal y como aparece en la figura 9. En este caso las leyes de cortantes y momentos en cualquier punto de la viga se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{i=1}^{N_p} P_i\langle x - b_i\rangle^0 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_q} q_i(\langle x - c_i\rangle - \langle x - d_i\rangle), \\ M(x) &= \sum_{i=1}^{N_m} M_i\langle x - a_i\rangle^0 + \sum_{i=1}^{N_p} P_i\langle x - b_i\rangle^1 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_q} \frac{q_i}{2}(\langle x - c_i\rangle^2 - \langle x - d_i\rangle^2), \end{aligned} \qquad (5)$$

si aceptamos que $\langle 0\rangle^0 = 0$. Para que los signos de estas expresiones sean correctos es necesario que las cargas estén colocadas en el sentido indicado en la figura 9.

Reglas para dibujar diagramas de esfuerzos. La interpretación de las expresiones (5) permiten enunciar algunas "reglas" que ayudan a dibujar diagramas de esfuerzos sin apenas cálculos. Para los diagramas de esfuerzos cortantes:

- Los momentos concentrados no tienen ningún efecto en ellos.
- Cada fuerza concentrada P_i produce un "salto" en el diagrama hacia arriba de ese tamaño (si la fuerza es hacia abajo, el salto será también en esa dirección).

- Una fuerza distribuida q_i produce un *cambio* de pendiente en el cortante de valor igual a $|q_i|$ y de sentido igual al de la fuerza.

Si construimos los diagramas de izquierda a derecha, para los diagramas de momentos flectores:

- Un momento concentrado M_i como el de la figura produce un "salto" del diagrama de valor $|M_i|$ hacia arriba, si el momento es como el de la figura 9 y hacia abajo si el momento es el opuesto.

- Cada fuerzas concentrada P_i produce un incremento en la pendiente del diagrama. Si la fuerza es como en la figura 9, el incremento es anti-horario, y horario en el caso contrario.

- Una fuerza distribuida q_i produce un incremento en la curvatura del diagrama de momentos flectores. Si q_i es hacia arriba, el diagrama de flectores "se curva hacia arriba" y viceversa.

Además de estas reglas, se debe de tener en cuenta que existen libertades en las que algún esfuerzo se anula. Por último, es útil comprobar que el módulo y dirección de los esfuerzos es coherente con las reacciones en todos los apoyos o extremos libres de la estructura.