Flexión de vigas

I. Romero
ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid
ignacio.romero@upm.es

6 de octubre de 2017

El estudio de la flexión en vigas es el más complejo e importante de cuantos se estudian en Resistencia de Materiales. Para un primer análisis empleamos la teoría de flexión de Euler-Bernoulli, que es la más sencilla y empleada en la mayoría de los casos. Teorías más avanzadas, como la de Timoshenko, se abordan en cursos más avanzados.

1. Tensiones debidas al momento flector

El estudio de las tensiones en vigas sometidas a flexión se comienza suponiendo que una viga recta está sometida a ***flexión pura***, es decir, constante a lo largo de su directriz. En este caso, y por un razonamiento puramente geométrico, la viga se curva y adquiere la forma de un arco de circunferencia, de curvatura constante. Indicando como v el desplazamiento en dirección del eje y, la curvatura es

$$\kappa(x) = \frac{v''(s)}{\sqrt{1 + (\frac{v'(x)}{2})}} \ . \tag{1}$$

Si consideramos únicamente situaciones en los que los desplazamientos v y los giros $\theta = v'$ son pequeños, la curvatura es, aproximadamente $k = v''$.

Una rebanada de esta viga sometida a flexión pura cambia su geometría al deformarse de manera que vista desde un lateral, pasa de tener una proyección rectangular a una trapezoidal. Llamamos ***eje neutro*** al lugar geométrico de los puntos en la sección cuyas fibras no sufren deformación longitudinal. Colocando un sistema de referencia (ξ, η) centrado en el eje neutro observamos que las deformaciones longitudinales, cuando esta rebanada está sometida a flexión pura son,

$$\varepsilon(x, \eta) = -\kappa(x)\eta \ . \tag{2}$$

Las tensiones normal asociadas a estas deformaciones son $\sigma_x(x, \eta) = E\varepsilon(x, \eta)$. La resultante de estas últimas ha de ser cero, porque las secciones transversales en la rebanada sólo están sometidas a un momento flector, así que

$$0 = \int_A \sigma_x(x, \eta) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta = -E\kappa(x) \int_A \eta \xi \eta. \tag{3}$$

Esta relación se cumple si el eje neutro (que corresponde con $\eta = 0$) pasa por el centro de área, es decir, corta a la directriz de la viga y por tanto $(\xi, \eta) = (z, y)$. Además, si el momento flector que actúa sobre la rebanada es M_z,

$$\begin{aligned} M_z(x) &= \int_A \sigma_x(x, y)(-y) \, \mathrm{d}A \\ &= E\kappa(x) \int_A y^2 \, \mathrm{d}A \\ &= E\kappa(x) I_z(x) \ , \end{aligned} \tag{4}$$

siendo I_z el momento de inercia de la sección respecto del eje z. Finalmente, empleando las relaciones (2)-(4) obtenemos al expresión de las tensiones normales en flexión:

$$\sigma_x(x, y) = E\varepsilon(x, y) = -E\kappa(x)y = -\frac{M_z(x)}{I_z(x)} y \ . \tag{5}$$

Esta expresión se conoce como la ***fórmula de Navier***. Las máximas tensiones normales (en valor absoluto) sobre una sección sometida a un par flector se darán, según la fórmula (5), allá donde y sea máximo. Es decir,

$$|\sigma_x|^{\text{máx}}(x) = \frac{M_x(x)}{I_z(x)} |y|_{\text{máx}} = \frac{M_x(x)}{I_z(x)/|y|_{\text{máx}}} = \frac{M_x(x)}{W_z(x)}. \tag{6}$$

La cantidad $W_z = I_z/|y|_{\text{máx}}$ es el ***módulo resistente a flexión*** de la sección.

Cuando una viga está sometida a un momento flector variable se dice que la ***flexión*** es ***simple***. En este caso, el razonamiento geométrico que hemos empleado para llegar a la fórmula de Navier no es cierto y se comprueba además, experimentalmente, que las secciones transversales se alabean. Como estas deformaciones son pequeñas en vigas largas, se suponen despreciables y por tanto se admite la fórmula de Navier en cualquier circunstancia, para flectores puros o simples.

2. Equilibrio

Para encontrar la ecuación diferencial de una viga sometida a flexión empleamos el mismo razonamiento que para el esfuerzo normal y el momento torsor. En el caso del flector, una rebanada diferencial genérica de una viga puede estar sometida a un flector y cortante cualquiera, y una carga por unidad de longitud vertical y hacia abajo q. El equilibrio de fuerzas verticales establece que

$$T(x) = T(x + \mathrm{d}x) + q(x)\,\mathrm{d}x \ . \tag{7}$$

Desarrollando en serie de Taylor el segundo cortante obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} + q(x) = 0 \ . \tag{8}$$

Imponiendo ahora el equilibrio de momento en esta rebanada diferencial se sigue que

$$M_z(x) + q(x)\frac{(\mathrm{d}x)^2}{2} = M_z(x + \mathrm{d}x) + T(x + \mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Expandiendo en serie de Taylor, como antes, los términos evaluados en $x + \mathrm{d}x$ y despreciando infinitésimos de orden superior se concluye

$$\frac{\mathrm{d}M_z(x)}{\mathrm{d}x} = T(x) \ . \tag{10}$$

Las ecuaciones (8) y (10) expresan en equilibrio de flectores y cortantes en vigas sometidas a estos esfuerzos y, como se puede apreciar, están acoplados. Ambas se pueden combinar, resultando en

$$\frac{\mathrm{d}^2M_z(x)}{\mathrm{d}x^2} + q(x) = 0. \tag{11}$$

3. Tensiones debidas al esfuerzo cortante

Cuando una viga sufre un momento flector variable, debe de haber un esfuerzo cortante que equilibre este cambio (ver la ecuación (10) y la figura 1). El esfuerzo cortante T también produce tensiones, esta vez tangenciales, en el plano de la sección. Se podría estimar que éstas tienen un valor constante $\tau = T/A$, pero no puede cierto porque en los bordes de la sección no se respetaría el equilibrio de tensiones.

Para hallar el valor de las tensiones tangenciales se estudia el equilibrio de una parte de una rebanada de espesor diferencial, de área A^*. Sobre sus caras transversales actúan fuerzas

$$\begin{aligned} F^+ &= \int_{A^*} \frac{M_z(x)}{I_z} y\,\mathrm{d}A = \frac{M_z(x)}{I_z} m_z(A^*), \\ F^- &= \frac{M_z(x+\mathrm{d}x)}{I_z} m_z(A^*) \end{aligned} \tag{12}$$

en sentido opuesto, siendo $m_z(A^*)$ el momento estático del área A^*, definida como

$$m_z(A^*) = \int_{A^*} y\,\mathrm{d}A = A^*\, y_G(A^*) \ . \tag{13}$$

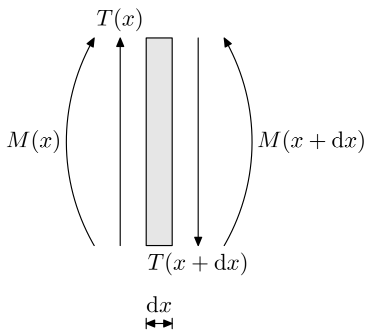

Figura 1: Momento flector variable y cortante sobre una rebanada diferencial.

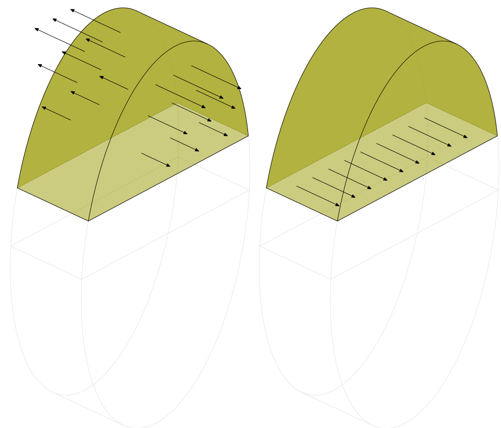

Figura 2: Tensiones normales debidas a un momento flector variable (izda.) y tensiones rasantes.

Puesto que las fuerzas F^+ y F^- no son iguales, deberá haber una fuerza rasante que las equilibre. De manera aproximada, esta fuerza será de la forma $R = \tau(y)b(y)\,\mathrm{d}x$. Imponiendo el equilibrio de fuerzas $F^- + R = F^+$, y empleando un desarrollo en serie de Taylor del momento flector, resulta

$$\tau(y) = \frac{T}{b(y)}\ \frac{m_z(A^*)}{I_z}, \tag{14}$$

que se conoce como la ***fórmula de Colignon***.

4. Deformación

Una sección sometida a flexión sufre una deformación que es la curvatura, y la relación entre ambas viene dada por la ecuación (5). Recordando que la curvatura es $\kappa = v''$ concluimos que

$$v''(x) = \frac{M_z(x)}{EI_z(x)}, \tag{15}$$

o, derivando esta ecuación dos veces y empleando (11),

$$v''''(x) = \frac{-q(x)}{EI_z(x)} \; . \tag{16}$$

Esta ecuación diferencial se conoce con el nombre de la ***ecuación de la elástica***. A diferencia de la ecuación diferencial que se empleaba para calcular la deformación en vigas sometidas a esfuerzo normal o torsor, la elástica es de segundo orden, lo cual dificulta algo su resolución.

La forma más sencilla de encontrar la expresión de la viga deformada en flexión es integrando dos veces la ecuación (15). Al ser esta una ecuación diferencial de segundo órden será necesario emplear dos condiciones de contorno para determinar la solución completa. Estas condiciones serán en función de los desplazamientos verticales y/o los giros.

5. Energía elástica

Para el cálculo de la expresión de la energía elástica en una viga sometida a flexión empleamos el mismo razonamiento que en temas anteriores: calculamos el trabajo de las fuerzas exteriores que se pueden aplicar sobre un tramo genérico de viga y lo re-escribimos sólo en función del valor del momento flector.

En tramo genérico de viga $x \in (A, B)$ sometido a flexión pueden actuar fuerzas y pares en sus extremos, además de una fuerzas por unidad de longitud vertical y hacia abajo. Según el teorema de Clapeyron, el trabajo que todas éstas realizan es:

$$\begin{aligned} W =& \frac{1}{2}F_A v_A + \frac{1}{2}F_B v_B + \frac{1}{2}M_A\theta_A + \frac{1}{2}M_B\theta_B \\ &- \frac{1}{2}\int_A^B q(x)v(x)\,\mathrm{d}x \; . \end{aligned} \tag{17}$$

Empleando la ecuación del equilibrio (11), el trabajo se puede re-escribir como

$$\begin{aligned} W =& \frac{1}{2}F_A v_A + \frac{1}{2}F_B v_B + \frac{1}{2}M_A\theta_A + \frac{1}{2}M_B\theta_B \\ &+ \frac{1}{2}\int_A^B \frac{\mathrm{d}^2 M_z(x)}{\mathrm{d}x^2} v(x)\,\mathrm{d}x \; . \end{aligned} \tag{18}$$

Finalmente, integrando por partes dos veces y utilizando las condiciones de contorno se concluye que el trabajo realizado por las fuerzas exteriores, y por tanto la energía elástica almacenada, es

$$U = \int_A^B \frac{M_z(x)^2}{2EI_z(x)}\,\mathrm{d}x \; . \tag{19}$$

6. La ecuación universal

En una viga recta, donde la generatriz coincida con un eje cartesiano x la ley de momentos flectores se puede escribir como

$$\begin{aligned} M(x) =& \sum_{i=1}^{N_m} M_i\langle x-a_i\rangle^0 + \sum_{i=1}^{N_p} P_i\langle x-b_i\rangle^1 \\ &+ \sum_{i=1}^{N_q} \frac{q_i}{2}(\langle x-c_i\rangle^2 - \langle x-d_i\rangle^2), \end{aligned} \tag{20}$$

donde las constantes a_i, b_i, c_i, d_i se refieren al lugar de aplicación de las cargas correspondientes, según se indica en la figura 3.

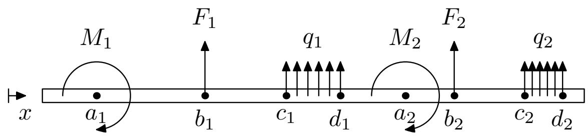

Figura 3: Definición de cargas genéricas sobre una viga a flexión.

En este caso, y si la rigidez EI es constante, la ecuación de la elástica (15) en tramos donde ésta sea válida se puede integrar dos veces resultando

$$\begin{aligned} EIv(x) =& EIv_0 + EI\theta_0 x \\ &+ \sum_{i=1}^{N_m} \frac{M_i}{2!}\langle x-a_i\rangle^2 + \sum_{i=1}^{N_p} \frac{P_i}{3!}\langle x-b_i\rangle^3 \\ &+ \sum_{i=1}^{N_q} \frac{q_i}{4!}(\langle x-c_i\rangle^4 - \langle x-d_i\rangle^4), \end{aligned} \tag{21}$$

siendo v_0 y θ_0 el desplazamiento vertical y giro, respectivamente, en el origen de coordenadas.

La expresión (21) es extremadamente cómoda para integrar la ecuación de la elástica, pero no es de aplicación completamente general. Resumiendo las condiciones indicadas anteriormente, la ecuación universal se puede emplear

- Para evaluar el desplazamiento vertical cuando los momentos flectores son en un único plano.
- Si la viga es recta.
- Si la ecuación diferencial (15) se cumple en todo punto, es decir, si no hay rótulas o articulaciones en la viga.
- Si la rigidez EI es constante.
- Si las cargas exteriores se limitan a fuerzas o momentos concentrados y cargas uniformemente distribuidas.

- El origen de coordenadas ha de coincidir con el extremo izquierdo de la viga.

La expresión (21) se puede generalizar incluyendo otros tipos de cargas, como distribuidas triangulares, parabólicas, etc. Para cada uno de estos tipos aparecería un término más en la suma de la elástica integrada. Aunque no tiene ninguna dificultad obtener estos otros términos, nos limitamos a los tres explicados anteriormente por ser los más comunes.

7. Flexión compuesta

Una sección de una viga está sometida a ***flexión compuesta*** cuando resiste un momento flector y un esfuerzo normal, ambos no nulos. El tratamiento de esta solicitación combinada es importante porque las columnas de los edificios y otras estructuras se encuentran en esta situación. Su análisis, además, sencillamente es una consecuencia de la superposición de tensiones y deformaciones originadas por cada uno de ambos esfuerzos. Así, por ejemplo, las tensiones normales a la sección transversal son:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{A}, \tag{22}$$

y las tensiones tangenciales son las debidas al cortante, si es no nulo. Como detalle interesante se comprueba que el eje neutro, cuya posición viene dada por la expresión

$$0 = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{A}, \tag{23}$$

es una recta contenida en el plano de sección, pero que no pasa por el centro de gravedad de esta. De hecho, es posible incluso que la recta no tenga intersección con la sección de la viga.

Cuando una fuerza se aplica perpendicularmente al plano de la sección de la viga, en ésta aparece una ***tracción/compresión excéntrica***. Si las coordenadas de esta fuerza F, supuesta normal saliente son $(y, z) = (\xi, \eta)$, los esfuerzos sobre la sección serán:

$$N = F\ , \qquad M_z = -F\xi\ , \qquad M_y = F\eta\ . \tag{24}$$

Se observa por tanto que una tracción/compresión excéntrica es una solicitación de flexión compuesta encubierta. En este caso, y utilizando la expresión (23), se sigue que el eje neutro es la recta

$$0 = \frac{\xi}{I_z} y + \frac{\eta}{I_y} z + \frac{1}{A}, \tag{25}$$

que es una expresión independiente del módulo y el sentido de la fuerza aplicada. A partir de la expresión anterior se confirma que cuanto más cercana es la fuerza F al centro de gravedad de la sección, aumenta la distancia del eje neutro al centro de gravedad. Se conoce como ***núcleo central*** aquellos puntos del plano de la sección en los que, si se aplica una fuerza F de tracción/compresión excéntrica, el eje neutro cae fuera de la sección. Cuando se aplica una tracción excéntrica en el núcleo central, todos los puntos de la sección sufren tensiones normales de tracción, y viceversa.