# Torsión

I. Romero
ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid
ignacio.romero@upm.es

26 de octubre de 2016

Cuando un tramo de una viga se somete a un par en la dirección de la directriz, éste se retuerce y llamamos por ello a este par, *torsor* y lo indicamos con el símbolo $M_t$. En este tema estudiamos los efectos de este tipo de pares, las tensiones y deformaciones que provocan, y su energía. Por sencillez, se consideran únicamente vigas de sección circular, hueca o maciza, pues su estudio es mucho más sencillo que el de secciones generales.

## 1. Tensiones

Cuando una rebanada de eje circular, hueco o macizo, se somete a un momento torsor, sus dos caras paralelas giran una respecto de la otra en el sentido de los momentos en cada cara. Como la geometría de la rebanada y de las cargas tiene simetría de revolución, la rebanada ha de mantener su forma cilíndrica.

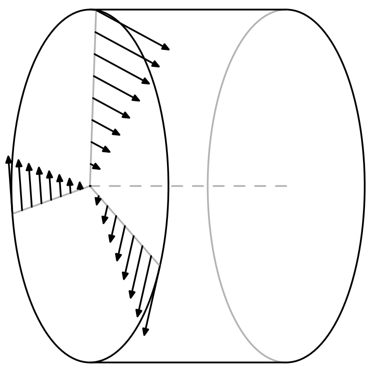

Figura 1: Tensiones tangenciales en un eje circular sometido a torsión

Estudiando un diferencial de esta rebanada se aprecia que la única deformación que existe sobre éste es angular, así pues debe de haber tensiones cortantes que la provoquen. Un simple razonamiento geométrico permite concluir que esta deformación angular es proporcional a la distancia $r$ al centro de la rebanada, y al giro por unidad de longitud, en que se retuerce ésta, es decir, $\gamma = \theta_{,x} r$ y por tanto, $\tau = G\theta_{,x} r$. Véase la figura 1. Por último, sabiendo que el par resultante de todas las fuerzas sobre una cara de la rebanada es $M_t$, se sigue que

$$M_t = \int_A r \cdot \tau \,\mathrm{d}A = \int_A \theta_{,x} G r^2 \,\mathrm{d}A = \theta_{,x} G I_0 \ , \quad (1)$$

siendo $A$ el área de la sección transversal e $I_0$ el momento polar de inercia de la misma respecto de su centro de área. De esta relación y la expresión de las tensiones tangenciales obtenemos las fórmulas

$$\theta_{,x} = \frac{M_t}{G I_0}, \qquad \tau = \frac{M_t}{I_0} r \ . \quad (2)$$

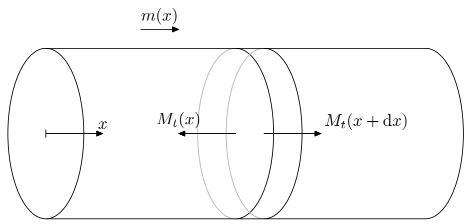


Figura 2: Pares actuando sobre una viga sometida a torsión variable.

## 2. Equilibrio

Consideremos ahora un tramo de un eje sometido a un momento distribuido $m = \tilde{m}(x)$ paralelo a la dirección de la directriz (ver figura 2). Si estudiamos el equilibrio de momentos paralelos a la directriz de la viga que actúan sobre una rebanada de esta podemos plantear

$$M_t(x) = M_t(x + \mathrm{d}x) + m(x)\,\mathrm{d}x \ . \quad (3)$$

Expandiendo el término $M(x + \mathrm{d}x)$ en una serie de Taylor de primer orden alrededor de $x$ concluimos

$$\frac{\mathrm{d}M_t(x)}{\mathrm{d}x} + m(x) = 0 \quad (4)$$

Esta es la ecuación diferencial del equilibrio de un eje sometido a torsión.

## 3. Deformación

Una rebanada sometida a un momento torsor se deforma con un giro relativo entre sus caras paralelas. Un simple argumento geométrico permite calcular el diferencial de giro relativo $\mathrm{d}\theta$ con la deformación angular $\gamma$ en un diferencial de la sección resultando $\gamma\,\mathrm{d}r = r\,\mathrm{d}\theta$. Puesto que $\gamma = \tau/G$ y empleando la expresión (2) de las tensiones tangenciales se puede concluir que

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{M_t}{G\,I_0} \ . \tag{5}$$

La deformación característica de un eje sometido a un par torsor es el giro por unidad de longitud $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$ que es, en cada sección, proporcional al par torsor e inversamente proporcional a $G\,I_0$, la rigidez a torsión de la sección.

Un eje sometido a un momento torsor cualquiera $M_t = M_t(x)$ sufre un giro relativo entre sus caras $x = a$ y $x = b$ que se puede calcular integrando la ecuación diferencial (5):

$$\theta(b) - \theta(a) = \int_a^b \frac{M_t}{G\,I_o}\,\mathrm{d}x \ . \tag{6}$$

En el caso de un ejes sometido a torsión pura el giro entre sus extremos es, por tanto,

$$\theta(L) - \theta(0) = \frac{M_t\,L}{G\,I_0}. \tag{7}$$

## 4. Energía

Por último calculamos la energía elástica almacenada en un eje sometido a torsión. Para ello consideramos un eje de longitud $L$ alineado con el eje $x$ sobre el que actúa un par $M_a$ en el extremo de la izquierda, un par $M_b$ en el de la derecha y un par exterior por unidad de longitud $\tilde{m}(x)$. En los tres casos tomamos como valor positivo estos pares si su vector está en dirección del eje $x$. El trabajo que realizan estas fuerzas es, por el teorema de Clapeyron,

$$W_{1\to 2} = M_a\theta_a + M_b\theta_b + \int_a^b \tilde{m}(x)\,\theta(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Despejando $\tilde{m}$ de la ecuación (4) y sustituyendo su valor en (8) se obtiene, después de integrar por partes que el trabajo empleado, y por tanto la energía elástica almacenada, es

$$U = \int_a^b \frac{M_t^2}{2\,G\,I_0}\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$